Chapter 03 द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)

CONTENT

1. परिचय (Introduction)
2. द्विघात समीकरण का हल (Solution of Quadratic Equation)
3. मूलो का योग और गुणनफल (Sum and product of roots)
4. एक द्विघात समीकरण का निर्माण जब मूल दिये गये हो (Formation of a quadratic equation when roots are given)
5. द्विघात समीकरण का निर्माण जिसके मूल α तथा β के सममित व्यंजक हो (Formation of quadratic equation whose roots are symmetric expression of α and β)
6. मूलों की प्रकृति (Nature of Roots)
7. द्विघात व्यंजक और उसका आलेख (Quadratic Expression and Its Graph)
8. समीकरण का सिद्धांत (Theory of Equations)
9. समान मूल के लिए प्रतिबंध (Condition of common roots)
10. द्विघात और परिमेय फलनों के अधिकतम और न्यूनतम मान (Maximum and minimum values of quadratic and rational functions)
11. एक सामान्य द्विघात व्यंजक को दो रैखिक गुणनखंडों x और y में हल करना (Resolving a general quadratic expression in x and y into two linear factors)
12. द्विघात असमिकाओ का हल (Solution of quadratic inequalities)
13. मूलो की स्थिति (Location of Roots)

1. परिचय (INTRODUCTION):

1.1 बहुपदः

एक व्यंजक जिसे $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$, प्रकार लिखा जा सकता है। जहां $a_0, a_1, a_2 ... a_n \in R$, n घात का बहुपद कहलाता है, जहाँ $n \in W$ और a_n बहुपद का **अग्रणी गुणांक** कहा जाता है, यह शून्य के बराबर नहीं होना चाहिए।

1.2 द्विघात व्यंजक :

व्यंजक जिसमे चर की घात 2 होती है ऐसे व्यंजक को द्विघात व्यंजक कहते हैं

$\Rightarrow$ जैसे : $y = ax^2 + bx + c$,

जहाँ $a =$ अग्रणी गुणांक और $c =$ द्विघात बहुपद का अचर पद।

1.3 द्विघात समीकरण :

यदि द्विघात बहुपद को शून्य के बराबर किया जाए तो द्विघात समीकरण कहलाता है।

उदाहरण के लिए: $ax^2 + bx + c = 0;\ a \neq 0$

$\Rightarrow$ यदि अग्रणी गुणांक 1 है तो बहुपद को एक गुणांकी बहुपद कहा जाता है। द्विघात समीकरण को हल करने का अर्थ है x का वह मान ज्ञात करना जिसके लिए $ax^2 + bx + c$ लुप्त हो जाता है और x के इन मानों को द्विघात समीकरण के मूल कहते है

2. द्विघात समीकरण का हल (SOLUTION OF QUADRATIC EQUATION):

2.1 गुणनखण्ड विधि:

माना $ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

तब $x = \alpha$ और $x = \beta$ दिये गए समीकरण को संतुष्ट करेगा।

2.2 द्विघाती सूत्र (श्रीधराचार्य विधि):

$ax^2 + bx + c = 0.\ a \neq 0;\ a, b, c \in R$ के मूल ज्ञात करना,

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

अत $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ तथा $\beta = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ जहां $D = b^2 - 4ac$

3. मूलो का योग और गुणनफल (SUM AND PRODUCT OF ROOTS):

$ax^2 + bx + c = 0;\quad a \neq 0;\quad a, b, c \in R$

यदि α, β मूल हैं तो $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a};\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ तथा $\alpha - \beta = \pm\dfrac{\sqrt{D}}{a}$

4. एक द्विघात समीकरण का निर्माण जब मूल दिये गये हो (FORMATION OF A QUADRATIC EQUATION WHEN ROOTS ARE GIVEN) :

माना α तथा β द्विघात समीकरण के दिए गए मूल हो, तो

$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$x^2 - x(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 0$

$x^2 - x$ (मूलों का योग) + (मूलों का गुणनफल) = 0

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

DETECTIVE MIND

$\alpha+\beta$ तथा $\alpha\beta$ $(\alpha, \beta \in R)$ के संदर्भ में कुछ रूपांतरण

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$\alpha^4+\beta^4=[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]^2-2\alpha^2\beta^2$

5. द्विघात समीकरण का निर्माण जिसके मूल α तथा β के सममित व्यंजक हों (Formation of quadratic equation whose roots are symmetric expression of α and β):

माना α तथा β एक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हो तो एक अन्य द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $2\alpha+3, 2\beta+3$.

मान लीजिए $2\alpha+3=y \Rightarrow \alpha=\dfrac{y-3}{2}$

दिए गए समीकरण में α का मान रखें और y में द्विघात समीकरण प्राप्त करें।

$\dfrac{a(y-3)^2}{4}+\dfrac{b(y-3)}{2}+c=0$

$a(y-3)^2+2b(y-3)+4c=0$

$ay^2+2y(b-3a)+9a-6b+4c=0$

y को x से बदलें और वांछित समीकरण प्राप्त करें

$ax^2+2x(b-3a)+9a-6b+4c=0.$

DETECTIVE MIND

यदि α, β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं तो वह समीकरण जिसके मूल हैं

(i) $-\alpha, -\beta$ $\Rightarrow$ $ax^2-bx+c=0$ (x को $-x$ से बदलें)

(ii) $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$ $\Rightarrow$ $cx^2+bx+a=0$ (x को $\dfrac{1}{x}$ से बदलें)

(iii) $k\alpha, k\beta$ $\Rightarrow$ $ax^2+kbx+k^2c=0.$ (x को $\dfrac{x}{k}$ से बदले)

(iv) $k+\alpha, k+\beta$ $\Rightarrow$ $a(x-k)^2+b(x-k)+c=0$ (x को $(x-k)$ से बदलें)

(v) $\dfrac{\alpha}{k}, \dfrac{\beta}{k}$ $\Rightarrow$ $k^2ax^2+kbx+c=0$ (x को kx से बदलें)

6. मूलों की प्रकृति (NATURE OF ROOTS) :

द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$, पर विचार करें, जहां $a, b, c \in R$ और $a \neq 0$.

तब समीकरण के मूल $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

अब, हम देखते हैं कि मूल b^2-4ac. के मान पर निर्भर करते हैं। इस मान को सामान्यतः D द्वारा निरूपित किया जाता है और इसे द्विघात समीकरण के विवेचक(विविक्तकर) के रूप में जाना जाता है जो मूलों की प्रकृति को तय करता है।

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ पर विचार करें,
इसके मूल α, β के रूप में ,है $D = b^2 - 4ac$

- $D = 0$
  मूल बराबर होते हैं
  $\alpha = \beta = -b/2a$
- $D \neq 0$
  मूल असमान हैं
  - $a, b, c \in R$ & $D > 0$
    वास्तविक मूल हैं
    - $a, b, c \in Q$ & D पूर्ण वर्ग है
      $\Rightarrow$ परिमेय मूल हैं
      - $a = 1, b, c \in I$ & D पूर्ण वर्ग है
        $\Rightarrow$ मूल पूर्णांक मे होगें
    - $a, b, c \in Q$ & D पूर्ण वर्ग नहीं है
      $\Rightarrow$ अपरिमेय मूल अर्थात $\alpha = p + \sqrt{q}, \beta = p - \sqrt{q}$
  - $a, b, c \in R$ & $D < 0$
    काल्पनिक मूल $\alpha = p + iq, \beta = p - iq$

SOLVED EXAMPLES

Ex.: 1 यदि समीकरण $4x^2 + 2x - 1 = 0$ का एक मूल α है , तो दूसरा मूल है

(1) 2α (2) $4\alpha^3 - 3\alpha$
(3) $4\alpha^3 + 3\alpha$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol.: माना α तथा β दिए गए समीकरण के मूल हैं, तो

$$\alpha + \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{2} - \alpha$$

अब $4\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 4\alpha^2 = 1 - 2\alpha$ .... (1)

अब $4\alpha^3 = \alpha - 2\alpha^2 = \alpha - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha)$ [(1) से].

$$\therefore 4\alpha^3 - 3\alpha = -2\alpha - \frac{1}{2}(1 - 2\alpha) = -\frac{1}{2} - \alpha = \beta$$

Ex.: 2 यदि $x^2 - 4x + \log_{1/2} a = 0$ के दो भिन्न वास्तविक मूल नहीं हैं, तो a का अधिकतम मान है

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{16}$
(3) $\frac{-1}{4}$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol.: चूकि $x^2 - 4x + \log_{1/2} a = 0$ के दो भिन्न वास्तविक मूल नहीं हैं, विवेचक $D \leq 0$

$$\Rightarrow 16 - 4\log_{1/2} a \leq 0 \Rightarrow \log_{1/2} a \geq 4 \Rightarrow a \leq \frac{1}{16}$$

Ex.: 3 एक द्विघात बहुपद p(x) के मूल $1 + \sqrt{5}$ तथा $1 - \sqrt{5}$ के रूप में है और यह p (1) = 2 को संतुष्ट करता है। द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए।

Sol.: मूलों का योग = 2, मूलों का गुणनफल = – 4

$\therefore$ मान लीजिए $p(x) = a(x^2 - 2x - 4)$

$\Rightarrow p(1) = 2 \Rightarrow 2 = a(1^2 - 2 \cdot 1 - 4)$

$\Rightarrow a = -2/5$

$\therefore p(x) = -2/5\,(x^2 - 2x - 4)$

Ex.: 4 यदि समीकरण $(k - 2)x^2 - (k - 4)x - 2 = 0$ के मूलों का अंतर 3 है तो k का मान है

(1) 1,3 (2) $3, \frac{3}{2}$ (3) $2, \frac{3}{2}$ (4) $\frac{3}{2}, 1$

Sol.: अब $\alpha + \beta = \left(\frac{k-4}{k-2}\right), \alpha\beta = \left(\frac{-2}{k-2}\right)$

$\therefore (\alpha - \beta)$

$$= \sqrt{\left(\frac{k-4}{k-2}\right)^2 + \frac{8}{(k-2)}} = \frac{\sqrt{k^2 + 16 - 8k + 8(k-2)}}{k-2}$$

$$3 = \frac{\sqrt{k^2 + 16 - 8k + 8(k-2)}}{k-2}$$

$3k - 6 = \pm k$

$k = 3, \frac{3}{2}$

Ex.: 5 m के किन मानों के लिए समीकरण $(1 + m)x^2 - 2(1 + 3m)x + (1 + 8m) = 0$ के मूल बराबर हैं।

Sol.: दिया गया समीकरण है $(1 + m)x^2 - 2(1 + 3m)x + (1 + 8m) = 0$........(i)

मान लीजिए D समीकरण........(i) का विवेचक है

समीकरण.......(i) के मूल बराबर होंगे यदि D = 0 है।

या $4(1 + 3m)^2 - 4(1 + m)(1 + 8m) = 0$

या $4(1 + 9m^2 + 6m - 1 - 9m - 8m^2) = 0$

या $m^2 - 3m = 0$, या $m(m - 3) = 0$

$\therefore m = 0, 3.$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Ex.: 6 a के सभी पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए द्विघात समीकरण $(x - a)(x - 10) + 1 = 0$ के मूल पूर्णांक हैं।

Sol.: यहाँ समीकरण $x^2 - (a + 10)x + 10a + 1 = 0.$ है। चूँकि पूर्णांक मूल सदैव परिमेय होंगे, इसका अर्थ है कि D एक पूर्ण वर्ग होना चाहिए।

(i) से $D = a^2 - 20a + 96.$

$\Rightarrow D = (a - 10)^2 - 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = (a - 10)^2 - D$

यदि D एक पूर्ण वर्ग है तो इसका अर्थ है कि हम दो पूर्ण वर्गों का अंतर 4 चाहते हैं जो तभी संभव है केवल जब $(a - 10)^2 = 4$ और $D = 0$

$\Rightarrow (a - 10) = \pm 2 \Rightarrow \quad a = 12, 8$

Ex.: 7 यदि द्विघात समीकरण $x^2 - 4x - \log_3 a = 0$ के मूल वास्तविक हैं, तो a का न्यूनतम मान है–

(1) 81 (2) 1/81

(3) 1/64 (4) इनमें से कोई नहीं

Sol.: चूँकि दिए गए समीकरण के मूल वास्तविक हैं।

$\therefore D > 0 \Rightarrow 16 + 4\log_3 a \geq 0$

$\Rightarrow \log_3 a \geq -4 \Rightarrow a \geq 3^{-4} \Rightarrow a \geq 1/81$

अत: a का न्यूनतम मान 1/81 है।

Ex.: 8 द्विघात समीकरण जिसका एक मूल $\frac{1}{2+\sqrt{5}}$ है, होगा–

(1) $x^2 + 4x - 1 = 0$ (2) $x^2 - 4x - 1 = 0$

(3) $x^2 + 4x + 1 = 0$ (4) इसमे से कोई नही

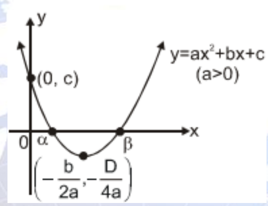
Sol.: दिया गया मूल $= \frac{1}{2+\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$

तो दूसरा मूल $= -\sqrt{5} - 2$ तब मूलों का योग $= -4$, मूलों का गुणनफल $= -1$

अत: समीकरण $x^2 + 4x - 1 = 0$ है

7. द्विघात व्यंजक और उसका आलेख (QUADRATIC EXPRESSION AND ITS GRAPH) :

$y = ax^2 + bx + c$ मे, यदि $a, b, c \in R$ और $a \neq 0$.द्विघात का आलेख एक परवलय का आकार लेता है।

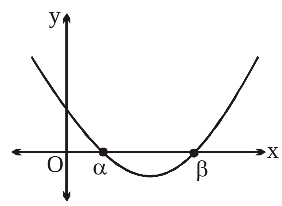


1. x , y के बीच का आलेख हमेशा एक परवलय होता है।
2. यदि $a > 0$ तो परवलय की आकृति ऊपर की ओर अवतल होती है और यदि $a < 0$ तो परवलय की आकृति नीचे की ओर अवतल होती है।
3. शीर्ष का निर्देशांक $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right)$ है
4. परवलय y –अक्ष को बिंदु (0, c) पर प्रतिच्छेद करता है
5. x–अक्ष के साथ परवलय के प्रतिच्छेद बिंदु का x –निर्देशांक द्विघात समीकरण $f(x) = 0$. के वास्तविक मूल हैं इसलिए परवलय x –अक्ष को वास्तविक बिंदुओं पर काट भी सकता है और नहीं भी।

टिप्पणी:

a, b, c के विभिन्न मानों के लिए यदि आलेख $y = ax^2 + bx + c$ आलेखित किया जाता है तो निम्नलिखित 6 विभिन्न आकृतियाँ प्राप्त होती हैं।

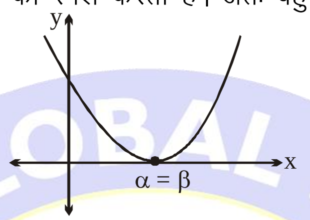
स्थिति–I: यदि $a > 0$ और $D > 0$ तब द्विघात समीकरण के दो मूल होते हैं और आलेख x–अक्ष को दो भिन्न बिंदुओं पर काटता है।



(i) y > 0, यदि x < α or x > β

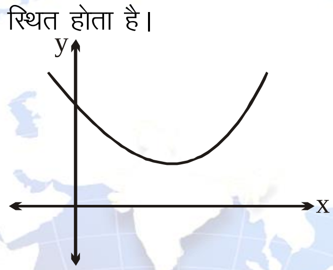
(ii) y < 0, यदि α < x < β

स्थिति–II: यदि a > 0 और D = 0 तब वक्र x–अक्ष को स्पर्श करता है। अतः बहुपद के दोनों शून्यक संपाती होते हैं।



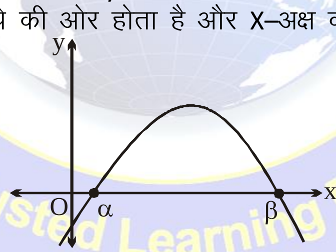
इस स्थिति में समीकरण $y = a(x-\alpha)^2$ और
$y \geq 0$, x के सभी वास्तविक मानो के लिए

स्थिति–III: यदि a > 0 और D < 0
तब वक्र पूरी तरह से x–अक्ष के ऊपर स्थित होता है।



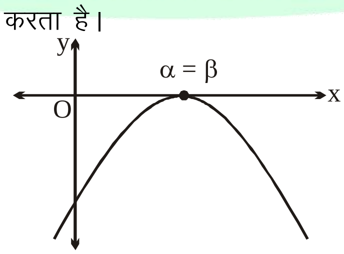
इस स्थिति में काल्पनिक मूल प्रकट होते हैं और y > 0 सभी $n \in R$ के लिए

स्थिति–IV: यदि a < 0 और D > 0 तब ग्राफ नीचे की ओर होता है और X–अक्ष को दो अलग–अलग बिंदुओं पर काटता है।



इस स्थिति में
(i) y > 0, यदि α < x < β
(ii) y < 0, यदि x < α या x > β

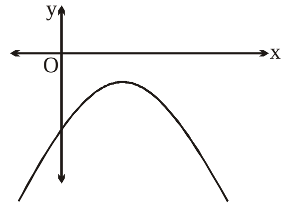
स्थिति–V: यदि a < 0 और D = 0
तब ग्राफ नीचे से X–अक्ष को स्पर्श करता है।



इस स्थिति में $x \in R$, $y \leq 0$ सभी $x \in R$ के लिए

स्थिति–VI: यदि a < 0 और D < 0 तब ग्राफ पूरी तरह से X–अक्ष के नीचे होता है और y < 0 सभी $x \in R$ के लिए

KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR



DETECTIVE MIND

- $\forall x \in R, y > 0$ यदि केवल यदि $a > 0$ और $b^2 - 4ac < 0$
- $\forall x \in R, y < 0$ यदि केवल यदि $a < 0$ और $b^2 - 4ac < 0$

8. समीकरण का सिद्धांत (Theory of Equations) :

बहुपद समीकरण के मूलों और गुणांकों के बीच संबंध

यदि $\alpha_1, \alpha_2 \alpha_3 ... \alpha_n$ समीकरण के मूल हैं;

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0$

जहाँ $a_0, a_1, ... a_n$ सभी वास्तविक हैं और $a_0 \neq 0$ फिर,

$$\Sigma\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0}, \Sigma\alpha_1\alpha_2 = +\frac{a_2}{a_0},$$

$$\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0}, ..., \alpha_1\alpha_2\alpha_3...\alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0},$$

DETECTIVE MIND

1. यदि α समीकरण $f(x) = 0$ का मूल है, तो बहुपद $f(x), (x - \alpha)$ से पूर्णतः विभाज्य होता है या $(x - \alpha)$, $f(x)$ का एक गुणनखंड है और इसके विपरीत।
2. n कोटि $(n \geq 1)$ के हर समीकरण के ठीक n मूल होते हैं और यदि समीकरण के n से अधिक मूल हैं, तो यह एक सर्वसमिका होती है।
3. यदि समीकरण $f(x) = 0$ के सभी गुणांक वास्तविक हैं और $\alpha + i\beta$ इसका मूल है, तो $\alpha - i\beta$ भी एक मूल होता है। इस प्रकार काल्पनिक मूल संयुग्मी युग्म में होते हैं।
4. यदि समीकरण में सभी गुणांक परिमेय हैं और इसके मूलों में से एक $\alpha + \sqrt{\beta}$ है, तो $\alpha - \sqrt{\beta}$ भी इसका एक मूल है जहाँ $\alpha, \beta \in Q$ और D एक पूर्ण वर्ग नहीं है
5. यदि कोई दो वास्तविक संख्याएँ 'a' और 'b' इस प्रकार हैं कि f(a) और f(b) विपरीत चिह्नों के हैं, तो $f(x) = 0$ के 'a' और 'b' के बीच कम से कम एक वास्तविक मूल होना चाहिए
6. विषम घात वाले प्रत्येक समीकरण $f(x) = 0$ में अचर पद के विपरीत चिन्ह का कम से कम एक वास्तविक मूल होता है।
7. वास्तविक गुणांक के साथ विषम घात वाले बहुपद समीकरण में कम से कम एक वास्तविक मूल होना चाहिए क्योंकि काल्पनिक मूल हमेशा संयुग्मों के युग्म में होते हैं।

9. समान मूल के लिए शर्त (CONDITION OF COMMON ROOTS) :

9.1 एक मूल समान के लिए शर्त:

माना $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ और $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ का एक उभयनिष्ठ मूल α है।

इसलिए $a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$

$a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$

वज्रगुणन द्वारा

$$\frac{\alpha^2}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{\alpha}{a_2c_1 - a_1c_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$\therefore \quad \alpha = \dfrac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_2c_1 - a_1c_2} = \dfrac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$, जो आवश्यक शर्त है।

- यह भी शर्त है कि दो द्विघात फलन $a_1x^2 + b_1x\,y + c_1y^2$ और $a_2x^2 + b_2x\,y + c_2y^2$ का एक उभयनिष्ठ गुणनखंड हो सकता है।

9.2 दोनों मूल समान के लिए शर्त:

यदि दिए गए समीकरणों के दोनों मूल उभयनिष्ठ हैं तो $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

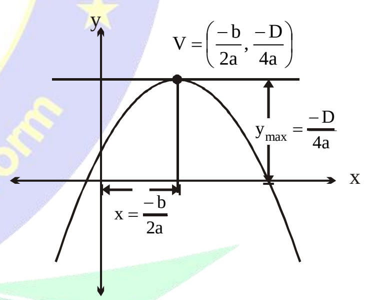
DETECTIVE MIND

यदि समीकरण $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ और $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ के मूल समान अनुपात में हैं, तो $\dfrac{b_1^2}{b_2^2} = \dfrac{a_1c_1}{a_2c_2}$

10. द्विघात और परिमेय फलनों के अधिकतम और न्यूनतम मान (MAXIMUM AND MINIMUM VALUES OF QUADRATIC AND RATIONAL FUNCTIONS):

(i) $a < 0$ या $a > 0$ के अनुसार $y = ax^2 + bx + c$, $x = \dfrac{-b}{2a}$ के साथ बिंदु पर अपना अधिकतम मान या न्यूनतम मान प्राप्त करता है

अब,यदि $a < 0$, तो $y_{max} = \dfrac{-D}{4a}$ और यह $x = \dfrac{-b}{2a}$ पर होता है .



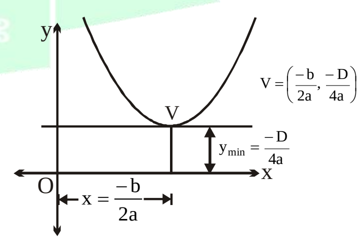
यदि $a > 0$, तब $y_{min} = \dfrac{-D}{4a}$ और यह $x = \dfrac{-b}{2a}$.पर होता है .

जहाँ $D = b^2 - 4ac$

परिसर जब $(x \in R)$:

यदि $a > 0 \Rightarrow f(x) \in \left[-\dfrac{D}{4a}, \infty\right)$

यदि $a < 0 \Rightarrow f(x) \in \left(-\infty, -\dfrac{D}{4a}\right]$



(ii) $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ के रूप में व्यक्त फलनों के परिसर जहाँ P(x) और Q(x) या तो रैखिक या द्विघात बहुपद हैं।

प्रकार–1: $y = \dfrac{ax+b}{px+q}$ $\dfrac{(\text{रैखिक})}{(\text{रैखिक})}$

Example: फलन $y = \dfrac{3x+2}{x-1}, x \neq 1$ का परिसर ज्ञात करे

Solution: $y = \dfrac{3x-3+5}{x-1}$

$\Rightarrow y = 3 + \frac{5}{x-1} \Rightarrow y - 3 = \frac{5}{x-1}$

$\Rightarrow x-1 = \frac{5}{y-3} \Rightarrow x = \frac{5}{y-3} + 1 = \frac{5+y-3}{y-3}$

$\Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3}, y \neq 3$

y = 3 के लिए, x परिभाषित नहीं है

$\therefore$ परिसर R – {3} है

प्रकार–2 $y = \frac{ax+b}{px^2+qx+r}$ $\frac{\text{(रैखिक)}}{\text{(द्विघात)}}$

Example: यदि x वास्तविक है तो फलन $y = \frac{x+2}{x^2+3x+6}$ का परिसर ज्ञात कीजिए

Solution: $y = \frac{x+2}{x^2+3x+6}$

$\Rightarrow$ $x^2y + 3xy + 6y = x + 2$

$\Rightarrow$ $x^2y + x(3y-1) + 6y - 2 = 0$

$\because$ x वास्तविक है $\therefore D \geq 0$

$\Rightarrow$ $(3y-1)^2 - 4y(6y-2) \geq 0$

$\Rightarrow$ $9y^2 - 6y + 1 - 24y^2 + 8y \geq 0$

$\Rightarrow$ $-15y^2 - 2y - 1 \leq 0$

$\Rightarrow$ $y \in \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right]$

प्रकार–3 $y = \frac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ $\left(\frac{\text{द्विघात}}{\text{द्विघात}}\right)$

Example: यदि x वास्तविक है तो सिद्ध कीजिए कि $y = \frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ $\frac{1}{7}$ से 7 के मध्य है।

Solution: $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4} = y$

$x^2(y-1) + 3x(y+1) + 4(y-1) = 0$ ... (i)

द्विघात समीकरण के लिए x^2 का गुणांक $\neq 0$

$\therefore$ $y \neq 1$ $\therefore$ x वास्तविक है $\therefore D \geq 0$

$\Rightarrow$ $9(y+1)^2 - 16(y-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -7y^2 + 50y - 7 \geq 0$

$\Rightarrow$ $7y^2 - 50y + 7 \leq 0 \Rightarrow (7y-1)(y-7) \leq 0$

$\Rightarrow$ $y \in \left[\frac{1}{7}, 7\right]$ परन्तु y = 1 सम्मिलित नहीं है।

यदि $y = 1 \Rightarrow \frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4} = 1 \Rightarrow$ $6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore$ y = 1 भी परिसर के मान में से एक है।

इसलिए, $y \in \left[\frac{1}{7}, 7\right]$

SOLVED EXAMPLES

Ex.:9 'p' का वह मान जिसके लिए $2x^2 - 2(p-2)x - p - 1 = 0$ के मूलों के वर्गों का योग कम से कम है,

(1) 1 (2) $\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) –1

Sol.: माना α तथा β समीकरण $2x^2 - 2(p-2)x - p - 1 = 0$ के दो मूल हों

तब

$\alpha + \beta = p - 2$ तथा $\alpha\beta = \frac{-p-1}{2}$

मना $S=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(p-2)^2+p+1 \Rightarrow p^2-3p+5 \Rightarrow \left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

जो कम से कम होता है जब $p=\frac{3}{2}$

Ex.:10 m का वह मान जिसके लिए $x^2-3x+2m=0$ का कोई एक मूल समीकरण $x^2-x+m=0$ के मूलों में से एक का दोगुना है, है

(1) 0, 2 (2) 0, –2 (3) 2, –2 (4) इनमें से कोई नहीं

Sol.: माना α, $x^2-x+m=0$ का मूल है तथा 2α, $x^2-3x+2m=0$ का मूल है, तब $\alpha^2-\alpha+m=0$ और $4\alpha^2-6\alpha+2m=0$

$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{2m}=\frac{\alpha}{m}=-1 \Rightarrow m^2=-2m \Rightarrow m=0, m=-2$

Ex.:11 व्यंजक $x^2+2bx+c$ का मान धनात्मक होगा यदि

(1) $b^2-4c>0$ (2) $b^2-4c<0$ (3) $c^2<b$ (4) $b^2<c$

Sol.: व्यंजक $=(x+b)^2-b^2+c$ = $(a+b)^2+(c-b)^2$

$\therefore$ व्यंजक धनात्मक होगा यदि $c-b^2>0 \Rightarrow b^2<c$

Ex.:12 यदि समीकरणों $x^2+3x+2=0$ तथा $x^2-x+\lambda=0$ के मूल समान अनुपात में हैं तो λ का मान द्वारा दिया गया है

(1) $\frac{2}{7}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{9}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$

Sol.: यदि मूल समान अनुपात में हों तो $\frac{b_1^2}{b_2^2}=\frac{a_1c_1}{a_2c_2}$

$\frac{3^2}{(-1)^2}=\frac{(1).(2)}{(1).(\lambda)} \Rightarrow 9=\frac{(2)}{(\lambda)} \Rightarrow \lambda=\frac{2}{9}$

Ex.:13 माना $p(x)=0$ न्यून संभव कोटि का एक बहुपद समीकरण हो, जिसमें गुणांक परिमेय हों, $\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}$ इसके मूलो में से एक के रूप में है तब $p(x)=0$ के सभी मूलों का गुणनफल है

(1) 7 (2) 49 (3) 56 (4) 63

Sol.: $x=\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}$

$\Rightarrow x^3=7+49+3\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{49}\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}\right) \Rightarrow x^3-21x-56=0$

$\Rightarrow$ मूलो का गुणनफल = 56

Ex.:14 समीकरणों $x^2+b^2=1-2bx$ तथा $x^2+a^2=1-2ax$ का एक और केवल एक उभयनिष्ठ मूल है। तब

(1) $a-b=2$ (2) $a-b+2=0$

(3) $|a-b|=2$ (4) ये सभी

Sol.: $(x+b)^2=1 \Rightarrow x=-b\pm1$

$(x+a)^2=1 \Rightarrow x=-a\pm1$

स्पष्ट रूप से $a\neq b$

इसलिए ,एक और केवल एक मूल उभयनिष्ठ है, अर्थात $-b+1=-a-1$ या $-b-1=-a+1$

$\Rightarrow a-b=-2$ या $a-b=2 \Rightarrow (a-b)=2$

Ex.:15 मान लीजिए $P(x)=ax^2+bx+8$ एक द्विघात बहुपद है। यदि x = 2 पर P(x) का न्यूनतम मान 6 है, तो a और b के मान ज्ञात कीजिए।

Sol.: $P(x)=ax^2+bx+8$ ...(1)

$P(2)=4a+2b+8=6$ ...(2)

$-\frac{b}{2a}=2;\ \therefore 4a=-b$

(2) से हम प्राप्त करते हैं $-b+2b=-2 \Rightarrow b=-2$

$\therefore 4a=-(-2) \Rightarrow a=1/2$

Ex.:16 यदि व्यंजक $x^2-11x+a$ तथा $x^2-14x+2a$ का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है। और $a\neq0$, तो उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है

(1) $(x-3)$ (2) $(x-6)$

(3) $(x-8)$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol.: यहाँ $x-\alpha$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है

फिर $x-\alpha$ संगत समीकरण का मूल है

$\therefore \alpha^2-11\alpha+a=0$

$\alpha^2-14\alpha+2a=0$

घटाने पर $3\alpha-a=0 \Rightarrow \alpha=\frac{a}{3}$

अत: $\frac{a^2}{9}-11\frac{a}{3}+a=0, a=0$ या $a=24$

जब $a\neq0, a=24$

$\begin{cases} x^2-11x+24 \\ x^2-14x+48 \end{cases}$ का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (x – 8) हैं

Ex.:17 यदि $Q_1(x)=x^2+(k-29)x-k$ और $Q_2(x)=2x^2+(2k-43)x+k$ दोनों एक घन बहुपद P(x) के गुणनखंड हैं, तो k का अधिकतम मान है

(1) 0 (2) 33 (3) 23 (4) 30

Sol.: दो द्विघात बहुपद, घन बहुपद के गुणनखंड तभी हो सकते हैं, जब उनके पास कम से कम एक मूल उभयनिष्ठ हो

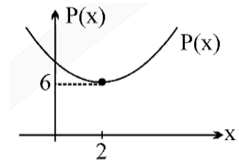
$\Rightarrow x^2+(k-29)x-k=0$ ...... (1)

तथा $2x^2+(2k-43)x+k=0$ ...... (2)

का एक मूल उभयनिष्ठ होना चाहिए

समीकरण (1) को 2 से गुणा करने और घटाकर, हम प्राप्त करते हैं

$15x + 3k = 0 \Rightarrow x = \frac{-k}{5}$ उभयनिष्ठ मूल है



और इसे समीकरण (1) को संतुष्ट करना चाहिए

$$\Rightarrow \frac{k^2}{25} + (k-29)\left(-\frac{k}{5}\right) - k = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{k}{5}\right)\left[-\frac{k}{5} + k - 29 + 5\right] = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ या } k = 30$$

Ex.:18 $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए

Sol.: चूंकि, $a < 0$

$$\therefore f(x)\ max = -\frac{D}{4a} = -\left(\frac{36 - 4(-3)5}{4(-3)}\right) = \frac{36+60}{12} = 8$$

वैकल्पिक तरीका:

$f(x) = -3(x^2 - 2x + 1) + 5 + 3 = -3(x - 1)^2 + 8$. स्पष्ट रूप से $x = 1$ पर $f(x)_{max} = 8$

Ex.:19 यदि समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ का एक मूल $x^2 + mx + n = 0$, का भी मूल है, तो दर्शाइए इसका दूसरा मूल $x^2 + (2a - m)x + a^2 - am + n = 0$ का एक मूल है

Sol.: मान लीजिए α समीकरण $x^2 + ax + b = 0$ का मूल है जो $x^2 + mx + n = 0$ का मूल भी है।

मान लीजिए β, $x^2 + ax + b = 0$ का अन्य मूल है, तो $\alpha + \beta = -a$.

हमारे पास $\alpha = -a - \beta$ है

$\because \alpha$ समीकरण $x^2 + mx + n = 0$ का एक मूल हैं

$(-a - \beta)^2 + m(-a - \beta) + n = 0$

या $\beta^2 + 2a\beta + a^2 - ma - m\beta + n = 0$

या $\beta^2 + (2a - m)\beta + a^2 - ma + n = 0$

अत: β, $x^2 + (2a - m)x + a^2 - ma + n = 0$ का मूल है।

Ex.:20 यदि α, β समीकरण $ax^2 + 3x + 2 = 0\ (a < 0)$ के मूल हैं, तो $\alpha^2/\beta + \beta^2/\alpha$ से बड़ा है–

(1) 0 (2) 1

(3) 2 (4) इनमें से कोई नहीं

Sol.: चूंकि $a < 0$, इसलिए विवेचक

$D = 9 - 8a > 0$ अत:, α और β वास्तविक हैं।

हमारे पास $\alpha + \beta = \frac{-3}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{2}{a}$ है।

$$\therefore \frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^3}{\alpha\beta} - 3(\alpha+\beta) = -\frac{27}{2a^2} + \frac{9}{a} < 0 \quad [\because a < 0]$$

11. एक व्यापक द्विघात व्यंजक को दो रैखिक गुणनखंडों x और y में हल करना (RESOLVING A GENERAL QUADRATIC EXPRESSION IN x AND y INTO TWO LINEAR FACTORS) :

एक द्विघात फलन $f(x,y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ को दो रैखिक गुणनखण्डों में हल किया जा सकता है यदि $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

या

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

12. द्विघात असमिकाओं का हल (Solution of quadratic inequalities) :

असमिका $ax^2 + bx + c > 0\ (a \neq 0)$ a, b, c $\in R$ को संतुष्ट करने वाले 'x' के मान:

1. यदि $D > 0$, अर्थात् समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो भिन्न मूल हैं $\alpha < \beta$

तब $a > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$

$a < 0 \Rightarrow x \in (\alpha, \beta)$

2. यदि $D = 0$, तो मूल बराबर होते हैं, अर्थात $\alpha = \beta$.

तब $a > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, \alpha) \cup (\alpha, \infty)$

$a < 0 \Rightarrow x \in \phi$

3. यदि $D < 0$, अर्थात् समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

तब $a > 0 \Rightarrow x \in R$

$a < 0 \Rightarrow x \in \phi$

4. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ < या = या > प्रकार की असमिकाएं अंतराल की विधि का उपयोग करके हल किया जा सकता है।

13. मूलो की स्थिति (Location of Roots) :

मान लीजिए $f(x) = ax^2 + bx + c$, जहां $a > 0$ और $a, b, c \in R$.

1. $f(x) = 0$ के दोनों मूलों का एक निर्दिष्ट संख्या 'd' से बड़े होने के लिए शर्त है $b^2 - 4ac \geq 0$,$f(d) > 0$ और $-b/2a>d$
2. $f(x) = 0$ की दोनों मूल 'd' के दोनों ओर स्थित है (दूसरे शब्दों में संख्या d, $f(x) = 0$ के मूलों के बीच स्थित है) के लिए शर्त $f(d) < 0$ और $b^2 - 4ac > 0$
3. $f(x)=0$ के ठीक एक मूल के अंतराल (d, e) में स्थित होने की शर्तें अर्थात $d < x < e$ है। $b^2 - 4ac > 0$ और $f(d) \cdot f(e) < 0$.
4. $f(x) = 0$ के दोनों मूल संख्या p और q के बीच सीमित हैं, के लिए शर्त $(p < q); b^2 - 4ac \geq 0; f(p) > 0; f(q) > 0$ और $p < (-b/2a) < q$.
5. एक मूल e से बड़ा है और दूसरा मूल d से छोटा हो तब शर्त : $b^2 - 4ac > 0;\ f(d) < 0$ और $f(e) < 0$

अन्य महत्वपुर्ण परिणाम:

एक द्विघात समीकरण 'x' के ठीक दो मानों से संतुष्ट होता है जो वास्तविक या काल्पनिक हो सकते हैं। समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in R$: है

एक द्विघात समीकरण यदि	$a \neq 0$	दो मूल
एक रैखिक समीकरण यदि	$a = 0, b \neq 0$	एक मूल
एक विरोधाभास यदि	$a = b = 0, c \neq 0$	कोई मूल नही
एक सर्वसमिका यदि	$a = b = c = 0$	अनंत मूल

SOLVED EXAMPLES

Ex.:21 सिद्ध कीजिए कि व्यंजक $2x^2 + 3xy + y^2 + 2y + 3x + 1$ को दो रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित किया जा सकता है। रैखिक गुणनखंडो को ज्ञात कीजिए।

Sol.: $2x^2 + 3xy + y^2 + 2y + 3x + 1$

दिए गए समीकरण को $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ के साथ तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$a = 2, h = \frac{3}{2}, b = 1, g = \frac{3}{2}, f = 1, c = 1$

स्पष्ट रूप से, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

$\Rightarrow$ दिए गए व्यंजक को दो रैखिक गुणनखंडों में गुणनखंडित किया जा सकता है

गुणनखंड ज्ञात करने के लिए x में द्विघात बनाइए

$2x^2 + 3x (y + l) + (y + 1)^2$

$\Rightarrow x = \frac{-3(y+1) \pm \sqrt{(y+1)^2}}{y}.$

$\Rightarrow 4x = -3(y+1) \pm (y+1)$

$\Rightarrow 4x = -2(y+1)$ या $4x = -4(y+1)$

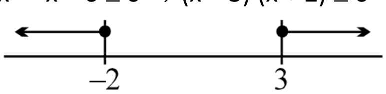
$\Rightarrow 2x + y + 1 = 0$ या $x + y + 1 = 0$

Ex.:22 यदि x वास्तविक हैं और $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$, तो x के मानों का समुच्चय ज्ञात कीजिए जिसके लिए y वास्तविक है।

Sol.: $4y^2 + 4xy + x + 6 = 0$ $y \in R$

$\therefore$ $D \geq 0 \Rightarrow 16x^2 - 16x(x+6) \geq 0$

$\Rightarrow$ $x^2 - x - 6 \geq 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) \geq 0$



$\therefore x \in (-\infty, -2] \cup [3, \infty)$

Ex.:23 'x' के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए असमिका , $-1 \leq \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 1$ संतुष्ट है।

Sol.: $-1 \leq \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow \frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \geq -1$

तथा $\frac{3x^2 - 7x + 8}{x^2 + 1} \leq 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 7x + 9 \geq 0$ तथा $x^2 - 7x + 7 \leq 0$

$\Rightarrow x \in R$ तथा $x \in \phi$

अत: x का कोई भी मान विद्यमान नही है जो असमिका का सन्तुष्ट करे

Ex.:24 $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$

Sol.: $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) \geq 5$

माना $x^2 + 3x = t$

$\Rightarrow (t + 1)(t - 3) \geq 5 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 \geq 0$

$\Rightarrow (t - 4)(t + 2) \geq 0$

$\Rightarrow t \in (-\infty, -2] \cup [4, \infty)$

$\Rightarrow x^2 + 3x \leq -2$ या $x^2 + 3x \geq 4$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 \leq 0$ या $x^2 + 3x \geq 4$

$\Rightarrow (x + 1)(x + 2) \leq 0$ या $(x + 4)(x - 1) \geq 0$

$\Rightarrow x \in [-2, -1]$ या $x \in (-\infty, -4] \cup [1, \infty)$

$\Rightarrow x^2 + 3x + 2 \leq 0$ या $x^2 + 3x \geq 4$

$\Rightarrow (x + 1)(x + 2) \leq 0$ या $(x + 4)(x - 1) \geq 0$

$\Rightarrow x \in [-2, -1]$ या $x \in (-\infty, -4] \cup [1, \infty)$

सम्मिलन लेने पर

$x \in (-\infty, -4] \cup [-2, -1] \cup [1, \infty)$

Ex.:25 यदि समीकरण $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ के दोनों मूल 3 से अधिक हैं, तो

(1) $a<1$ (2) $a>\frac{11}{9}$ (3) $a>\frac{3}{2}$ (4) $a<\frac{5}{2}$

Sol.: द्विघात समीकरण $f(x) = x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ ...(1)

वास्तविक मूल होंगे यदि

$D = 36a^2 - 4(2 - 2a + 9a^2) \geq 0$ ...(2)

$\Rightarrow -8(1-a) \geq 0$ या $a \geq 1$

समी. (1) के मूल 3 से अधिक होंगे यदि

$\frac{-b}{2a} = -\left(\frac{-6a}{2}\right) = 3a > 3$ या $a > 1$ ...(3)

तथा $f(3) = 9 - 18a + 2 - 2a + 9a^2 > 0$

$\Rightarrow 9a^2 - 20a + 11 > 0 \Rightarrow (9a - 11)(a - 1) > 0$

$\Rightarrow \left(a - \frac{11}{9}\right)(a-1) > 0$

$\Rightarrow a < 1$ या $a > \frac{11}{9}$ ...(4)

इस प्रकार (2), (3) और (4) एक साथ सन्तुष्ट करेंगे यदि $a > \frac{11}{9}$.

Ex.:26 k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए समीकरण $x^2 - (k+1)x + k^2 + k - 8 = 0$ का एक मूल 2 से अधिक है और दूसरा 2 से छोटा है।

Sol.: $x^2 - (k+1)x + k^2 + k - 8 = 0$

$a > 0$, अत: $f(2) < 0$

$\Rightarrow 4 - (k+1)2 + k^2 + k - 8 < 0$

$k^2 - k - 6 < 0 \quad \Rightarrow (k-3)(k+2) < 0$

$k \in (-2, 3)$

Ex.:27 यदि α, β द्विघात समीकरण $x^2 + 2(k-3)x + 9 = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ के मूल हैं। यदि $\alpha, \beta \in (-6, 1)$ तो k का मान ज्ञात कीजिए।

Sol.: $x^2 + 2(k-3)x + 9 = 0$

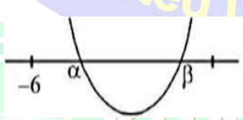
$\alpha, \beta \in (-6, 1)$

चूँकि अग्रणी गुणांक 1 है, इसलिए

(i) $D \geq 0$

$4(k-3)^2 - 4\times 9 \geq 0$

$(k-6)k \geq 0$



$k \in (-\infty, 0) \cup [6, \infty)$

(ii) $f(-6) > 0$

$36 - 12(k-3) + 9 > 0$

$36 + 36 - 12k + 9 > 0$

$12k < 81$

$k < \frac{27}{4}$

(iii) $f(1) > 0, \quad 1 + 2(k-3) + 9 > 0$

$2k + 4 > 0, \quad k > -2$

(iv) $-6 < \frac{-b}{2a} < 1, \quad -6 < 3 - k < 1$

$2 < k < 9$

उपरोक्त चार स्थितियों का सर्वनिष्ठ करने पर हमें प्राप्त होता है $k \in \left[6, \frac{27}{4}\right)$

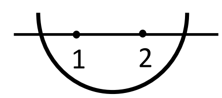
Ex.:28 k के वे सभी मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए द्विघात समीकरण $(k-5)x^2 - 2kx + k - 4 = 0$ का एक मूल 1 से छोटा है और दूसरा मूल 2 से बड़ा है।

Sol.: $(k-5)x^2 - 2kx + k - 4 = 0$

स्थिति–I

(i) $k - 5 > 0$

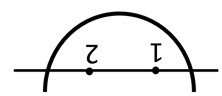
$k > 5$



(ii) $f(1) < 0$

$(k-5) - 2k + k - 4 < 0$

$-9 < 0$



(iii) $f(2) < 0$

$4(k-5) - 4k + k - 4 < 0$

$k - 24 < 0$

$k < 24$

$k \in (5, 24)$

स्थिति–II:

(i) $k - 5 < 0 \quad \Rightarrow k < 5$

(ii) $f(1) > 0$

$-9 > 0$ जो संभव नहीं है।

इसलिए हल (5, 24) है।