Chapter 04 सारणिक (Determinant)

CONTENT

- परिचय
- उपसारणिक और सहखंड
- सारणिको के गुणधर्म
- सारणिको के अनुप्रयोग
- दो सारणिको का गुणन
- रैखिक समीकरणों के निकाय
- क्रैमर का नियम

1. परिचय (INTRODUCTION) :

(i) प्रतीक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ द्वितीय कोटि का सारणिक कहलाता है। इसका मान निम्न द्वारा दिया गया है: $D = a_1 b_2 - a_2 b_1$

(ii) 1 कोटि का एक सारणिक संख्या ही होता है।

(iii) प्रतीक $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ तृतीय कोटि का सारणिक कहलाता है। इसका मान इस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$ या

$$D = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$ .... और इसी तरह।

इस प्रकार हम R_1, R_2, R_3 या C_1, C_2, C_3 अवयवों का उपयोग करके एक सारणिक का विस्तार 6 प्रकार से कर सकते हैं।

2. उपसारणिक और सहखंड (MINORS & COFACTORS) :

माना Δ सारणिक है। तब अवयव a_{ij} का उपसारणिक M_{ij} द्वारा निरूपित करते है जिसे i^{th} पंक्ति और j^{th} स्तंभ को हटाकर प्राप्त सहआव्यूह के सारणिक के रूप में परिभाषित किया गया है अवयव a_{ij} का सहखंड C_{ij} द्वारा निरूपित किया जाता है जिसे $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ के रूप में परिभाषित किया गया है।

किसी भी कोटि का सारणिक : माना $A = [a_{ij}]_n$ एक वर्ग आव्यूह $(n > 1)$ है A को सारणिक के संबंधित सहखण्ड के किसी एक पंक्ति (या किसी एक स्तंभ) के अवयवों के गुणनफल के योग के रूप में परिभाषित किया जाता है।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$|A| = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$ (प्रथम पंक्ति से).

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$|A| = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$ (द्वितीय स्तंभ से).

$$= -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

उपसारणिको के पदो में कोटि 3 के सारणिक का मान इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$ (प्रथम पंक्ति का उपयोग करके)

सारणिक का परिवर्त: एक सारणिक का परिवर्त संगत आव्यूह के परिवर्त का सारणिक होता है। इसे D^T या D' से निरुपित करते हैं।

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow D^T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

SOLVED EXAMPLES

Example : 1 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$ है, तब सभी अवयवों के लिए उपसारणिक और सहखण्ड़ ज्ञात कीजिए।

Solution :
$M_{11} = -3 = C_{11}$
$M_{12} = -1, C_{12} = +1$
$M_{21} = 2, C_{21} = -2$
$M_{22} = 1 = C_{22}$

Example : 2 यदि $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ है, तब M_{12}, C_{21} ज्ञात कीजिए।

Solution :
$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-2 = 1$

$C_{21} = (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-1) = -1$

Example : 3 $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$ मूल्यांकन कीजिए।

Solution :
$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}$

$= (a + ib)(a - ib) - (-c + id)(c + id)$
$= (a^2 - i^2b^2) - (i^2d^2 - c^2)$
$= (a^2 + b^2) - (-d^2 - c^2) \quad [\because i^2 = -1]$
$= a^2 + b^2 + d^2 + c^2$
$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Example : 4 $\begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ मूल्यांकन कीजिए।

Solution :
$\begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 2\cos^2\theta + 2\sin^2\theta = 2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2.1 = 2$

Example : 5 सारणिक $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ का मूल्यांकन कीजिए।

Solution :
C_1 का विस्तार करने पर $1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 0 + 6 + 1 = 6$

Example : 6 सारणिक $\begin{vmatrix} 0 & (a-b)^2 & (a-c)^2 \\ (b-a)^2 & 0 & (b-c)^2 \\ (c-a)^2 & (c-b)^2 & 0 \end{vmatrix}$ बराबर है –

(1) $(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2$ (2) 0

(3) $2(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2$ 2 (4) इनमें से कोई नहीं

Solution : सारणिक का विस्तार करते हुए, हम प्राप्त करते हैं

$\Delta = -(b-a)^2 [0-(a-c)^2 (c-b)^2] + (c-a)^2[(a-b)^2 (b-c)^2 - 0]$

$= 2(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2$

3. सारणिक के गुणधर्म (PROPERTIES OF DETERMINANT) :

(1) $|A| = |A'|$ किसी भी वर्ग आव्युह A के लिए।

अर्थात एक सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है, यदि पंक्तियों और स्तंभों को परस्पर आपस में बदल दिया जाता है।

अर्थात $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = D'$

(2) यदि सारणिक की किन्हीं दो पंक्तियों (या स्तंभों) को परस्पर आपस में बदल दिया जाए, तो सारणिक के मान का केवल चिहन बदल जाता है।

जैसे माना $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ और $D_2 = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ हैं, तब $D_2 = -D_1$

(3) माना λ एक अदिश हो। तब $\lambda |A|$ को $|A|$ की किसी एक पंक्ति (या किसी एक स्तम्भ) को λ द्वारा गुणा करके प्राप्त किया जाता है।

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ और $E = \begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 & \lambda c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ हैं, तब $E = \lambda D$

(4) $|AB| = |A|\,|B|$ हैं।

(5) $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ हैं, जब $A = [a_{ij}]_n$ हो।

(6) विषम कोटि के विषम–सममित सारणिक का मान शून्य होता है। {विषम–सममित आव्युह का अर्थ $D^T = -D$ है }

(7) यदि किसी सारणिक के किसी पंक्ति या स्तंभ में सभी अवयव शून्य हैं, तो उसका मान शून्य होता है।

अर्थात $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

(8) यदि एक सारणिक की कोई दो पंक्तियाँ (या स्तंभ) समतुल्य (या आनुपातिक) हैं, तो इसका मान शून्य होता है।

अर्थात $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$

(9) यदि किसी पंक्ति (या स्तंभ) के प्रत्येक अवयव को दो पदों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, तो सारणिक को भी दो सारणिकों के योग के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, अर्थात

$$\begin{vmatrix} a_1+x & b_1+y & c_1+z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(10) किसी भी पंक्ति (या स्तम्भ) के अवयवों को कोई अन्य पंक्ति (या स्तंभ) के संगत अवयवों के अचर गुणांक में जोड़ने पर सारणिक का मान नहीं बदलता है।

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{और} \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1+ma_2 & b_1+mb_2 & c_1+mc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+na_1 & b_3+nb_1 & c_3+nc_1 \end{vmatrix}$$.तब $D_2 = D_1$

(11) माना $A = [a_{ij}]_n$ है संगत सहखण्डों वाले कोई भी पंक्ति के अवयवों का किसी अन्य पंक्ति के अवयवों के गुणनफल का योग शून्य होता है। (इसी प्रकार कोई अन्य स्तंभ के संगत सहखंड वाले कोई भी स्तम्भ के अवयवों के गुणनफल का योग शून्य होता है)।

SOLVED EXAMPLES

Example : 7 $\begin{vmatrix} 5 & 25 & 125 \\ 1 & 5 & 25 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix}$ मूल्यांकन कीजिए।

Solution :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 25 & 125 \\ 1 & 5 & 25 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 5 & 25 \\ 4 & 8 & 12 \end{vmatrix} = 0$$

Example : 8 सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)]$ है।

Solution : प्रमाण :

माना $D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

$R_1 \to R_1 - R_2,\ R_2 \to R_2 - R_3$

$$\Rightarrow D = \begin{vmatrix} 0 & x-y & x^2-y^2 \\ 0 & y-z & y^2-z^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$D = (x-y)(y\text{-}z)\begin{vmatrix} 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & y-z \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-X)$$

$D = (x-y)(y-z)(z-x)$. **इतिसिद्धम्।**

Example : 9 सरल कीजिए $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

Solution : माना $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_2,\ C_2 \to C_2 - C_3$ से हल करने पर

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ b-c & c-a & a \\ c-a & a-b & b \end{vmatrix}$$

$= (a + b + c)\ ((b - c)\ (a - b) - (c - a)^2)$

$= (a + b + c)\ (ab + bc - ca - b^2 - c^2 + 2ca - a^2)$

$= (a + b + c)\ (ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2) \equiv 3abc - a^3 - b^3 - c^3$

Example : 10 सरल कीजिए $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}$

Solution : दिया गया सारणिक बराबर है।

$$= \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ abc & abc & abc \end{vmatrix} = \frac{abc}{abc}\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$C_1 \to C_1 - C_2,\quad C_2 \to C_2 - C_3$ से हल करने पर

$$= \begin{vmatrix} a^2 - b^2 & b^2 - c^2 & c^2 \\ a^3 - b^3 & b^3 - c^3 & c^3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} a+b & b+c & c^2 \\ a^2+ab+b^2 & b^2+bc+c^2 & c^3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (a - b)\ (b - c)\ [ab^2 + abc + ac^2 + b^3 + b^2C + bc^2 - a^2b - a^2c - ab^2 - abc - b^3 - b^2c]$

$= (a - b)\ (b - c)\ [c(ab + bc + ca) - a(ab + bc + ca)]$

$= (a - b)\ (b - c)\ (c - a)\ (ab + bc + ca)$

Example : 11 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ हल कीजिए।

Solution : माना $C_1 \to C_1 - C_2$ और $\quad C_2 \to C_2 - C_3$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -(a+b+c) & 0 & 2a \\ (a+b+c) & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$$

C_1 और C_2 से (a + b + c) उभयनिष्ठ लेने पर

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix}$$

अब $R_3 \to R_1 + R_2 + R_3$

$$D = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2a \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 0 & a+b+c \end{vmatrix} D = (a+b+c)^2 \ (a+b+c) = (a+b+c)^3$$

Example : 12 सारणिक $\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix}$ का मान है –

(1) 2(a + b + c) (2) $2(a+b+c)^2$ (3) $2(a+b+c)^3$ (4) $(2a+2b+2c)^3$

Solution : $C_1 + C_2 + C_3$, से हल करने पर, हमे प्राप्त होता हैं।

$$\text{सारणिक} = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & b+c+2a & b \\ 1 & a & c+a+2b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & a+b+c & 0 \\ 0 & 0 & c+a+b \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_1$ से हल करने पर)

$= 2(a+b+c)^3$

Example : 13 $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ हो, तो a, b, c हैं –

(1) A.P. (2) G.P. (3) H.P. (4) इनमें से कोई नहीं

Solution : सक्रियाँ $C_3 - (\alpha C_1 + C_2)$ द्वारा, हमे प्राप्त होता हैं।

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ a\alpha+b & b\alpha+c & -(a\alpha^2+2b\alpha+c) \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -(a\alpha^2 + 2b\alpha + c)(ac - b^2) = 0$

$\Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow$ a, b, c, G.P. मे है।

Example : 14 $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$ बराबर है –

(1) $a^2b^2c^2$ (2) $2a^2b^2c^2$ (3) $4a^2b^2c^2$ (4) इनमें से कोई नहीं

Solution : $R_1-(R_2+R_3)$, से हल करने पर, हमें प्राप्त होता हैं।

$$\text{सारणिक} = \begin{vmatrix} 0 & -2c^2 & -2b^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -c^2 & -b^2 \\ b^2 & c^2+a^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 0 & -c^2 & -b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \\ c^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$ ($R_2 \to R_2 + R_1$ और $R_3 \to R_3 + R_1$ लागू करने पर)

$$= 2\,(a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2) = 4a^2b^2c^2$$

Example : 15 यदि $\begin{vmatrix} a & 5x & p \\ b & 10y & 5 \\ c & 15z & 15 \end{vmatrix} = 125$ है, तब $\begin{vmatrix} 3a & 3b & c \\ x & 2y & z \\ p & 5 & 5 \end{vmatrix}$ बराबर है –

(1) 25 (2) 50 (3) 75 (4) 100

Solution : $$\begin{vmatrix} 3a & 3b & c \\ x & 2y & z \\ p & 5 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & x & p \\ 3b & 2y & 5 \\ c & z & 5 \end{vmatrix}$$

(पंक्तियों को स्तंभो में बदलने पर)

$$= \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3a & x & p \\ 3b & 2y & 5 \\ 3c & 3z & 15 \end{vmatrix} = \frac{3}{3} \times \frac{1}{5}\begin{vmatrix} a & 5x & p \\ b & 10y & 5 \\ c & 15z & 15 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(125) = 25$$

Example : 16 यदि $\begin{vmatrix} 3^2+k & 4^2 & 3^2+3+k \\ 4^2+k & 5^2 & 4^2+4+k \\ 5^2+k & 6^2 & 5^2+5+k \end{vmatrix} = 0$ हो, तो k का मान है –

(1) 2 (2) 1 (3) –1 (4) 0

Solution : दिए गए सारणिक को दो सारणिकों में तोड़ने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$\begin{vmatrix} 3^2+k & 4^2 & 3^2+k \\ 4^2+k & 5^2 & 4^2+k \\ 5^2+k & 6^2 & 5^2+k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3^2+k & 4^2 & 3 \\ 4^2+k & 5^2 & 4 \\ 5^2+k & 6^2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 0 + \begin{vmatrix} 9+k & 16 & 3 \\ 7 & 9 & 1 \\ 9 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ ($R_3 \to R_3 - R_2$ से हल करने पर, तब $R_2 \to R_2 - R_1$)

(दूसरे सारणिक मे $R_3 \to R_3 - R_2$ और $R_2 \to R_2 - R_1$ से हल करने पर)

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 9+k & 16 & 3 \\ 7 & 9 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ $R_3 \to R_3 - R_2$ से हल करने पर

$$\begin{vmatrix} 9+k & 7-k & 3 \\ 7 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ $C_2 \to C_2 - C_1$ से हल करने पर

$\Rightarrow \quad 2(7-k-6) = 0$

$\Rightarrow \quad k = 1$

Example : 17 यदि $0 < \theta < \pi/2$ और $\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 4\theta \end{vmatrix} = 0$ हो, तो θ बराबर है।

(1) $\pi/24, 5\pi/24$ (2) $5\pi/24, 7\pi/24$ (3) $7\pi/24, 11\pi/24$ (4) इनमें से कोई नहीं

Solution : $R_2 \to R_2 - R_1$ और $R_3 \to R_3 - R_1$, से हल करने, पर हमे प्राप्त होता हैं।

$$\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 4\theta \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 2 + 4\sin 4\theta = 0$

$\Rightarrow \sin 4\theta = -1/2$

$\Rightarrow 4\theta = n\pi + (-1)^n(-\pi/6)$

$\Rightarrow \theta = n\pi/4 + (-1)^n(-\pi/24)$

$\therefore \theta = 7\pi/24, 11\pi/24$

Example : 18 यदि $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x & b & b \\ a & x & b \\ a & a & x \end{vmatrix}$ और $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix}$ हो, तो

(1) $\Delta_1 = 3\Delta_2^2$ (2) $\frac{d}{dx}(\Delta_1) = 3\Delta_2^2$ (3) $\frac{d}{dx}(\Delta_1) = 3\Delta_2$ (4) इनमें से कोई नहीं

Solution : चूँकि हम जानते हैं कि यदि $\Delta = f(x) = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$ हो, तो

$$\frac{d}{dx}(\Delta) = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}(R_1) \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ \frac{d}{dx}(R_2) \\ R_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \frac{d}{dx}(R_3) \end{vmatrix}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\Delta_1) = \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}(x) & \frac{d}{dx}(b) & \frac{d}{dx}(b) \\ a & x & b \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x & b & b \\ \frac{d}{dx}(a) & \frac{d}{dx}(x) & \frac{d}{dx}(b) \\ a & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & b \\ a & x & b \\ \frac{d}{dx}(a) & \frac{d}{dx}(a) & \frac{d}{dx}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & x & b \\ a & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ a & a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b & b \\ a & x & b \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & b \\ a & x \end{vmatrix} = 3\Delta_2$$

Example : 19 सारणिक $D = \begin{vmatrix} n! & (n+1)! & (n+2)! \\ (n+1)! & (n+2)! & (n+3)! \\ (n+2)! & (n+3)! & (n+4)! \end{vmatrix}$ का मान है। (जब $n \in N$ हो)

(1) $(n!)^3 ((2n^3 + 8n^2 + 10n + 4)$ (2) $(n!)^3 (2n^2 + 8n + 10)$

(3) $(n!)^2 (2n^3 + 8n^2 + 10n + 4)$ (4) इनमें से कोई नहीं

Solution : यहाँ

$$D = (n!)^3 \begin{vmatrix} 1 & n+1 & (n+2)(n+1) \\ n+1 & (n+2)(n+1) & (n+3)(n+2)(n+1) \\ (n+2)(n+1) & (n+3)(n+2)(n+1) & (n+4)(n+3)(n+2)(n+1) \end{vmatrix}$$

$$= (n!)^3 (n+1)^2 (n+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ n+1 & n+2 & (n+3) \\ (n+2)(n+1) & (n+3)(n+2) & (n+4)(n+3) \end{vmatrix}$$

$C_2 \to C_2 - C_1$, $C_3 \to C_3 - C_2$ संक्रिया और विस्तार करने पर

$= (n!)^3 (n+1)^2 (n+2). 2$

$= (n!)^3((2n^3 + 8n^2 + 10n + 4)$ सरलीकरण के अनुसार।

टिप्पणी : $n = 1$ लेकर उत्तर को सत्यापित किया जा सकता है।

Example : 20 यदि $\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ 2x^2+3x-1 & 3x & 3x-3 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} = Px - 12$ है, तब

(1) P = 24 (2) P = – 24 (3) P = 0 (4) P = 12

Solution : $R_2 \to R_2 - (R_1 + R_3)$ से हल करने पर

सारणिक $\begin{vmatrix} x^2+x & x+1 & x-2 \\ -4 & 0 & 0 \\ x^2+2x+3 & 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} = Px - 12$

दुसरी पक्ति का प्रसार करने पर

$-(-4)\begin{vmatrix} x+1 & x-2 \\ 2x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} + 0 + 0 = Px - 12$

$\Rightarrow 4 [(2x^2 + x - 1) - (2x^2 - 5x + 2)] = Px - 12$

$\Rightarrow 24x - 12 = Px - 12$

$\Rightarrow P = 24$

Example : 21 यदि $\Delta_r = \begin{vmatrix} r-1 & n & 6 \\ (r-1)^2 & 2n^2 & 4n-2 \\ (r-1)^3 & 3n^2 & 3n^2-3n \end{vmatrix}$ है, तब $\sum_{r=1}^{n} \Delta_r$ बराबर है।

(1)1 (2) – 1 (3) 0 (4) इनमें से कोई नहीं

Solution : $\because \sum_{r=1}^{n}(r-1) = 1 + 2 + ... + (n-1)$

$= \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\sum_{r=1}^{n}(r-1)^2 = 1^2 + 2^2 + ... + (n-1)^2 = \dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

$$\sum_{r=1}^{n}(r-1)^3 = 1^3 + 2^3 + ... + (n-1)^3 = \frac{n^2(n-1)^2}{4}$$

$$\therefore \quad \sum_{r=1}^{n}\Delta_r \begin{vmatrix} \frac{n(n-1)}{2} & n & 6 \\ \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) & 2n^2 & 2(2n-1) \\ \frac{1}{4}n^2(n-1)^2 & 3n^3 & 3n(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n-1)}{12}\begin{vmatrix} 6 & n & 6 \\ 2(2n-1) & 2n^2 & 2(2n-1) \\ 3n(n-1) & 3n^3 & 3n(n-1) \end{vmatrix} = 0$$

Example : 22 सारणिकों के गुणधर्मो का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \text{ है ।}$$

Solution : L.H.S. $= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a-b & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

संक्रियाँ: $C_1 \to C_1 + C_2 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ 0 & b-c & c-a \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b-c & c-a \\ 2 & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

संक्रियाँ: $R_3 \to R_3 - 2R_1$

$$= (a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & b-c & c-a \\ 0 & c+a-2b & a+b-2c \end{vmatrix}$$

C_1 का प्रसार करने पर

$$= (a + b + c) \cdot 1\begin{vmatrix} b-c & c-a \\ c+a-2b & a+b-2c \end{vmatrix}$$

संक्रियाँ: $R_2 \to R_2 + 2R_1$

$$= (a + b + c)\begin{vmatrix} b-c & c-a \\ a-c & b-a \end{vmatrix}$$

$= (a + b + c) [(b - c) (b - a) - (a - c) (c - a)]$

$= (a + b + c) [(b^2 - ab - bc + ac) + (a^2 + c^2 - 2ac)]$

$= (a + b + c) (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ = R.H.S

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

4. सारणिक के अनुप्रयोग (APPLICATION OF DETERMINANTS) :

(i) एक त्रिभुज का क्षेत्रफल जिसके शीर्ष (x_r, y_r); r = 1, 2, 3 हैं।

$D = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ यदि D = 0 है, तो तीनों बिंदु संरेख होते हैं।

(ii) (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से गुजरने वाली एक सरल रेखा का समीकरण $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ होता है।

(iii) रेखाएँ:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ .... (1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ .... (2)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ .... (3)

संगामी होती हैं यदि $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ हो।

2 चरों वाले तीन युगपत रैखिक समीकरणों की संगतता के लिए शर्त।

(iv) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ सरल रेखाओं के एक युग्म को दर्शाता है यदि:

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

5. दो सारणिको का गुणन (MULTIPLICATION OF TWO DETERMINANTS) :

(i) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1l_1 + b_1l_2 & a_1m_1 + b_1m_2 \\ a_2l_1 + b_2l_2 & a_2m_1 + b_2m_2 \end{vmatrix}$

इसी प्रकार तीन कोटि वाले दो सारणिकों को गुणा किया जाता है।

(ii) यदि $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ है, तब $D^2 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ होता है, जहाँ A_i, B_i, C_i सहखंड हैं।

प्रमाण : $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix}$ विचार करे

टिप्पणी : $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0$ आदि। $(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = D$ आदि।)

इसलिए, $D \times \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = D^3$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = D^2$ या $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = D^2$

6. रैखिक समीकरण निकाय (दो चरो वाले) (SYSTEM OF LINEAR EQUATION (IN TWO VARIABLES)) :

(i) संगत समीकरण : निश्चित और अद्वितीय [प्रतिच्छेदन रेखाएँ]

(ii) असंगत समीकरण : कोई हल नहीं । [समांतर रेखा]

(iii) आश्रित समीकरण : अनंत हल [सम्पाती रेखाएँ]

माना $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ तब:

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ तब समीकरण निकाय संगत होता हैं।,

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ दिए गए समीकरण निकाय असंगत हैं।

और $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow$ दिए गए समीकरण निकाय आश्रित हैं।

7. क्रेमर का नियम : [तीन अज्ञात को शामिल करते हुए एक साथ समीकरण]

(CRAMER'S RULE : [Simultaneous Equations Involving Three Unknowns]) :

माना $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ ...(I) ; $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ...(II) ; $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ...(III)

तब, $x = \frac{D_1}{D}$, $Y = \frac{D_2}{D}$, $Z = \frac{D_3}{D}$.

जहाँ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ और $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

टिप्पणी :

(a) यदि $D \neq 0$ और कम से कम $D_1, D_2, D_3 \neq 0$ हैं, तो दिए गए समीकरणों के निकाय संगत होते है और अद्वितीय अतुच्छ अतुच्छ हल होते है।

(b) यदि $D \neq 0$ और $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ है, तो दिए गए समीकरणों के निकाय संगत होते हैं और केवल तुच्छ हल होते है।

(c) यदि $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ हो, तो दिए गए समीकरणों के निकाय संगत होते है और इसके अनंत हल होते हैं।

परन्तु यदि $\left.\begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{matrix}\right\}$ समांतर समतल को निरूपित करते है तो लेकिन साथ ही

तथा $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$ है, तब निकाय असंगत होते है।

(d) यदि $D = 0$ है, लेकिन D_1, D_2, D_3 में से कम से कम एक शून्य नहीं है, तो समीकरण असंगत हैं और कोई हल नहीं होता है।

टिप्पणी:

यदि x, y, z सभी शून्य नहीं होते हैं, तो x, y, z में $a_1x + b_1y + c_1z = 0$; $a_2x + b_2y + c_2z = 0$ और $a_3x + b_3y + c_3z = 0$ के संगत होने के लिए शर्त है कि $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ हो।

याद रखें कि यदि दिए गए रैखिक समीकरणों के निकाय का सभी चरों के लिए **केवल शून्य** हल होते है, यह हल तुच्छ हल कहलाता है।

SOLVED EXAMPLES

Example : 23 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि यह $\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 12 \end{vmatrix}$ के बराबर है।

Solution : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\times3-2\times1 & 1\times0+2\times4 \\ -1\times3+3\times(-1) & -1\times0+3\times4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 60$

Example : 24 सिद्ध कीजिए कि $\begin{vmatrix} a_1x_1+b_1y_1 & a_1x_2+b_1y_2 & a_1x_3+b_1y_3 \\ a_2x_1+b_2y_1 & a_2x_2+b_2y_2 & a_2x_3+b_2y_3 \\ a_3x_1+b_3y_1 & a_3x_2+b_3y_2 & a_3x_3+b_3y_3 \end{vmatrix} = 0$ है।

Solution : दिए गए सारणिक को दो सारणिकों के गुणनफल में विभाजित किया जा सकता है।

अर्थात $\begin{vmatrix} a_1x_1+b_1y_1 & a_1x_2+b_1y_2 & a_1x_3+b_1y_3 \\ a_2x_1+b_2y_1 & a_2x_2+b_2y_2 & a_2x_3+b_2y_3 \\ a_3x_1+b_3y_1 & a_3x_2+b_3y_2 & a_3x_3+b_3y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Example : 25 निम्नलिखित समीकरण निकाय $x + y + z = 5$,$2x + 2y + 2z = 7$, $3x + 3y + 3z = 6$ को हल कीजिए।

Solution : $\therefore\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad D_1 = 0, \quad D_2 = 0, \quad D_3 = 0$

$\because$ माना $z = t$ $\quad x + y = 5 - t$ $\quad$ समीकरण (i) से

$2x + 2y = 7 - 2t$ $\quad$ समीकरण (ii) से

चूँकि दोनों रेखाएँ समांतर हैं इसलिए x और y का कोई मान नहीं होगा इसलिए दिए गए समीकरण का कोई हल नहीं होता है।

Example : 26 निम्नलिखित समीकरण निकाय $x + y + z = 2$, $2x + 2y + 2z = 4$, $3x + 3y + 3z = 6$ को हल कीजिए।

Solution : $\therefore\ D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0.$

D, D_1, D_2 और D_3 के सभी सहखण्ड़ शून्य हैं, इसलिए समीकरणों के निकाय के अनंत हल होंगे।

माना $z = t_1, y = t_2 \quad \Rightarrow \quad x = 2 - t_1 - t_2$ जहाँ $t_1, t_2 \in R$ है।

Example : 27 निम्नलिखित समीकरण निकाय $x + y + z = 6$, $x + 2y + 3z = 10$, $x + 2y + \lambda z = \mu$ पर विचार कीजिए और λ तथा μ के मान इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि समीकरण के हैं।

(i) अद्वितीय हल (ii) अनंत हल (iii) कोई हल नहीं

Solution : $x + y + z = 6$ $\quad x + 2y + 3z = 10$ $\quad x + 2y + \lambda z = \mu$ $\quad D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix}$

यहाँ $\lambda = 3$ के लिए दूसरी और तीसरी पंक्तियाँ समान हैं अतः $\lambda = 3$ के लिए $D = 0$ है।

$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 10 & 2 & 3 \\ \mu & 2 & \lambda \end{vmatrix}$ $\quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 10 & 3 \\ 1 & \mu & \lambda \end{vmatrix}$ $\quad D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 10 \\ 1 & 2 & \mu \end{vmatrix}$

यदि $\lambda = 3$ है, तो $\mu = 10$ के लिए $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ है।

(i) अद्वितीय हल के लिए $D \neq 0$ अर्थात $\lambda \neq 3$

(ii) अनंत हल के लिए

$D = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3 \qquad D_1 = D_2 = D_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = 10.$

(iii) कोई हल नही के लिए $\quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3$

D_1, D_2 या D_3 में से कम से कम एक शून्य नहीं है $\quad \Rightarrow \quad \mu \neq 10.$