Chapter 02

समुच्चय और संबंध (Sets and Relations)

CONTENT

1. समुच्चय की परिभाषा
2. समुच्चयो का निरूपण
3. समुच्चय के प्रकार
4. सार्वत्रिक समुच्चय
5. असयुंक्त समुच्चय
6. पूरक समुच्चय
7. घात समुच्चय
8. वेन (आयलर) आरेख
9. समुच्चयो पर संक्रियाएँ
10. विभिन्न समुच्चयों में अवयवो की संख्या
11. दो समुच्चयो का कार्तीय गुणनफल
12. समुच्चयो पर बीजगणितीय संक्रियाएँ
13. संबंध की परिभाषा
14. संबंधों के प्रकार
15. सबंध का प्रतिलोम

1. समुच्चय की परिभाषा (DEFINITION OF SET):

एक सुपरिभाषित वस्तुओ का संग्रह समुच्चय होता है जो परस्पर भिन्न होते हैं समुच्चय को प्राय बड़े अक्षरों A, B, C, ... आदि द्वारा निरूपित किया जाता है और समुच्चय के अवयवो को a, b, c, ... द्वारा निरूपित किया जाता है।

यदि a समुच्चय A का एक अवयव है, तो हम $a \in A$ लिखते हैं और कहते हैं कि a समुच्चय A का अवयव है।

यदि a, A का अवयव नहीं हो, तो हम $a \notin A$ लिखते है।

उदा. प्रथम पाँच अभाज्य प्राकृत संख्याओं का संग्रह 2, 3, 5, 7, 11 अवयवो वाला एक समुच्चय है।

कुछ महत्वपूर्ण संख्या समुच्चय :

N = सभी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
= {1, 2, 3, 4, ...}

W = सभी पूर्ण संख्याओं का समुच्चय
= {0, 1, 2, 3, ...}

Z या I = सभी पूर्णांकों का समुच्चय
= {.... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

Z^+ = सभी +ve पूर्णांकों का समुच्चय
= {1, 2, 3, ...} = N

Z^- = सभी –ve पूर्णांकों का समुच्चय
= (–1, –2, –3, ...}

Z_0 = सभी शून्येतर पूर्णांकों का समुच्चय।
= {±1, ±2, ±3, ...}

Q = सभी परिमेय संख्याओं का समुच्चय।

$= \left\{\frac{p}{q} : p, q \in I, q \neq 0\right\}$

Q^+ = धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय।

Q^- = ऋणात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय।

Q_0 = अशुन्य परिमेय संख्याओं का समुच्चय।

R = सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

R^+ = सभी धनात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

R^- = सभी ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

R_0 = सभी अशुन्य वास्तविक संख्याओं का समुच्चय।

R – Q = सभी अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय।

उदा. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ...π, e, log2 आदि सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

C = सभी सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

$C = \{x + iy : x, y \in R, y \neq 0, i = \sqrt{-1}\}$

2. समुच्चयो का निरूपण (REPRESENTATION OF SETS)

(1) सारणीबद्ध विधि (रोस्टर विधि) :

इस विधी में, सभी अवयवो को अर्ध–विराम से अलग करके, कोष्ठक के भीतर सूचीबद्ध करके एक समुच्चय का निर्माण किया जाता है।

(2) समुच्चय निर्माण विधि (समुच्चय गुण विधि) :

इस विधि में, एक समुच्चय को उसके अवयव x के सर्वनिष्ट गुणधर्म P(x) को निरूपित करके वर्णित किया जाता है। ऐसी स्थिति में समुच्चय का वर्णन {x : P(x) या {x P(x) धारण} द्वारा किया जाता है, जिसे सभी x के समुच्चय के रूप में पढ़ा जाता है जैसे कि P(x) धारण करता है। चिन्ह '|' या ':' को इस प्रकार पढ़ा जाता है।

3. समुच्चयो के प्रकार (TYPES OF SETS)

(A) परिमित समुच्चय :

एक समुच्चय X को एक परिमित समुच्चय कहा जाता है यदि इसके अवयवो को प्राकृत संख्याओं की सहायता से गणना करके सूचीबद्ध किया जा सकता है और प्रक्रिया एक निश्चित प्राकृत संख्या n पर समाप्त करतें है। अर्थात n(X) = परिमित संख्या है उदा. (A) अंग्रेजी अक्षरों का एक समुच्चय (B) भारतीय सेना में सैनिकों की संख्या का समुच्चय

(B) अपरिमित समुच्चय :

एक समुच्चय जिसके अवयवो को प्राकृत संख्याओं द्वारा सूचीबद्ध या गिना नहीं जा सकता है

(1, 2, 3.......n) कोई भी संख्या n के लिए, एक अपरिमित समुच्चय कहलाती है

उदा. (a) एक तल में सभी बिंदुओं का एक समुच्चय

(b) $X = \{ x : x \in R, 0 < x < 0.0001\}$

(c) $X = \{x : x \in Q, 0 \le x \le 0.0001\}$

(C) एकल समुच्चय :

एक अवयव वाले समुच्चय को एकल समुच्चय कहा जाता है। अर्थात n(X)= 1

उदा. $\{x : x \in N, 1 < x < 3\}$, {{}}: शून्य समुच्चय का समुच्चय, वर्णमाला ϕ युक्त एक समुच्चय $\{\phi\}$ है।

(D) शून्य समुच्चय :

एक समुच्चय को रिक्त, शून्य या अशक्त समुच्चय कहा जाता है यदि इसमें कोई अवयव नहीं होते है, और इसे ϕ द्वारा निरूपित किया जाता है अर्थात X एक शून्य समुच्चय होता है यदि n(X) = 0 हो।

उदा. $\{x : x \in R$ और $x^2 + 2 = 0\}$, {x : x > 1 लेकिन

$x < \frac{1}{2}\}$, $\{x : x \in R, x^2 < 0\}$

(E) समतुल्य समुच्चय:

दो परिमित समुच्चय A और B समतुल्य होते हैं यदि उनके अवयवो की सख्या समान हो अर्थात n(A) = n(B)

(F) समान समुच्चय:

दो समुच्चयो A और B को समान समुच्चय कहलाते हैं यदि A का प्रत्येक अवयव B का सदस्य हो और B का प्रत्येक अवयव A का सदस्य है अर्थात A = B

4. सार्वत्रिक समुच्चय (UNIVERSAL SET)

यह एक समुच्चय है जिसमें विचाराधीन सभी समुच्चय शामिल होते हैं अर्थात दिए गए समुच्चय में से प्रत्येक का एक घात समुच्चय है। इस प्रकार, वह समुच्चय जिसमें किसी दिए गए संदर्भ में सभी समुच्चय हों, सार्वत्रिक समुच्चय कहलाता है। इसे U द्वारा निरूपित जाता है उदाहरण: यदि A = {1, 2, 3}, B = {2, 4, 5, 6} और C = {1, 3, 5, 7} हो, तो U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} को सार्वत्रिक समुच्चय के रूप में लिया जा सकता है।

5. असयुंक्त समुच्चय (DISJOINT SETS)

समुच्चयो A और B को असंयुक्त कहा जाता है यदि A और B में कोई उभयनिष्ठ अवयव नहीं हो या $A \cap B = \phi$ हो यदि $A \cap B \neq \phi$ है, तो A और B को प्रतिच्छेद या अतिव्यापी समुच्चय कहा जाता है।

उदाहरण: (i) यदि A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6} और C = {4, 7, 9} हो, तो A और B असंयुक्त समुच्चय होते हैं। जबकि B और C प्रतिच्छेदी समुच्चय होते हैं।

(ii) सम प्राकृत संख्याओं और विषम प्राकृत संख्याओ का समुच्चय असंयुक्त समुच्चय होता हैं।

6. पूरक समुच्चय (COMPLEMENTARY SET)

समुच्चय A का पूरक समुच्चय एक ऐसा समुच्चय है जिसमें सार्वत्रिक समुच्चय के वे सभी अवयव होते हैं जो A में नहीं होते हैं। इसे $\bar{A}$ या A^C या A′ द्वारा निरूपित किया जाता है अत : $A^C = \{x : x \in U$ लेकिन $x \notin A\}$ है।

उदाहरण यदि समुच्चय A = {1, 2, 3, 4, 5} और सार्वत्रिक समुच्चय U = {1, 2, 3, 4,.......50} हो, तो $\bar{A}$ = {6, 7, ...50} है।

DETECTIVE MIND

सभी असंयुक्त समुच्चय, पूरक समुच्चय नहीं होते हैं, लेकिन सभी पूरक समुच्चय, असंयुक्त होते हैं।

7. उपसमुच्चय (SUBSET)

समुच्चय A को B का उपसमुच्चय कहा जाता है यदि A के सभी अवयव, B में स्थित हों और इसे $A \subset B$ द्वारा निरूपित किया जाता है। (A, B का उपसमुच्चय पढ़ते है) और प्रतीकात्मक रूप से $x \in A \Rightarrow x \in B \Leftrightarrow A \subset B$ इस प्रकार लिखा जाता है।

(A) उपसमुच्चयो की संख्या :

एक समुच्चय X पर विचार करें जिसमें n अवयव हों अर्थात $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ हो, तो X के उपसमुच्चयों की कुल संख्या 2^n होती है।

प्रमाण : उपरोक्त समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या कुल n विशिष्ट अवयवो में से किसी एक समय में उनमें से किसी संख्या को लेने वाले अवयवो के चयनो की संख्या के बराबर होती है और यह 2^n के बराबर होते है।

$\because\ {}^nc_0 + {}^nc_1 + {}^nc_2 + ... + {}^nc_n = 2^n$

(B) उपसमुच्चयो के प्रकार :

समुच्चय A को समुच्चय B का उचित उपसमुच्चय कहा जाता है यदि A का प्रत्येक अवयव B का अवयव है और B में कम से कम एक अवयव है जो A का अवयव नहीं है और $A \subset B$ द्वारा निरूपित किया जाता है।

समुच्चय A स्वयं और रिक्त समुच्चय को अनुचित उपसमुच्चय के रूप में जाना जाता है और इसे $A \subseteq B$ के रूप में निरूपित किया जाता है।

उदा. यदि $x = \{x_1, x_2, ...,x_n\}$ हो, तो उचित समुच्चयों की कुल संख्या = $2^n - 2$ (स्वयं और शून्य समुच्चय को छोड़कर) कथन $A \subset B$ को $B \supset A$ के रूप में लिखा जा सकता है, तो B को A का अधि समुच्चय कहा जाता है और इसे $B \supset A$ के रूप में लिखा जाता है।

8. घात समुच्चय (POWER SETS)

समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को A का घात समुच्चय कहते है और इसे P(A) द्वारा निरूपित किया जाता है।

अर्थात P(A) = {x : x, A का उपसमुच्चय है} यदि $X = \{x_1, x_2, x_3, ...x_n\}$ हों, तो $n(P(X)) = 2^n$,($n(P(P(x))) = 2^{2^n}$ है।

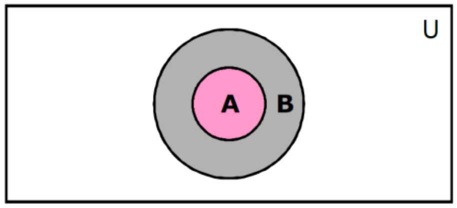
9. वेन (आयलर) आरेख (VENN (EULER) DIAGRAMS)

समुच्चयों को निरूपित करने के लिए बनाए गए आरेखों को वेन आरेख या आयलर–वेन आरेख कहा जाता है। यहाँ हम आयत के भीतर सभी बिंदुओं के समुच्चय के रूप में सार्वत्रिक समुच्चय U को निरूपित करते हैं और समुच्चय U के उपसमुच्चय A को एक वृत्त के अभ्यंतर

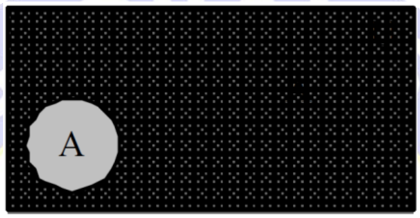
KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

द्वारा निरूपित किया जाता है। यदि समुच्चय A, समुच्चय B का एक उपसमुच्चय हो, तो A को निरूपित करने वाले वृत्त B को निरूपित करने वाले वृत्त के भीतर खींचा जाता है। यदि A और B समान नहीं हैं, लेकिन उनमें कुछ अभयनिस्ट अवयव हो, तो A और B को दो प्रतिच्छेदी वृत्तों द्वारा निरूपित किया जाता है।

उदाहरण के लिए यदि A, B का उपसमुच्चय है तो इसे आकृति में आरेखिय रूप में निरूपित किया गया है।



उदाहरण यदि A एक समुच्चय है, तो A के पूरक को आकृति में निरूपित किया गया है।

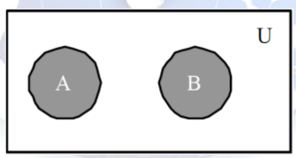


10. समुच्चयो पर संक्रियाएँ (OPERATIONS ON SETS)

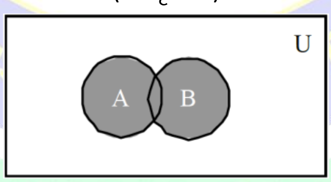
(A) समुच्चयो का सम्मिलन (संघ)

यदि A और B दो समुच्चय हो, तो A और B का सम्मिलन ($\cup$) उन सभी अवयवो का समुच्चय होते है जो या तो A या B या A और B दोनों से संबंधित हैं। इसे $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$ के रूप में भी परिभाषित किया गया है।

इसे आकृति 1 और आकृति 2 में वेन आरेख के माध्यम से निरूपित किया गया है।



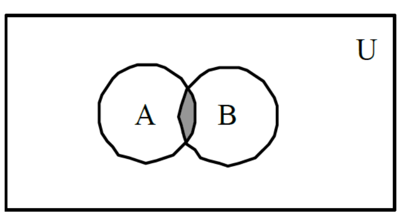
(आकृति 1)



(आकृति 2)

(B समुच्चयो का सर्वनिष्ठ :

यदि A और B दो समुच्चय हो,तो A और B का सर्वनिष्ट ($\cap$) उन सभी अवयवो का समुच्चय होता है जो A और B दोनों से संबंधित हैं। इसे $A \cap B = \{x : x \in A$ और $x \in B\}$ के रूप में भी परिभाषित किया गया है जिसे वेन आरेख में निरूपित गया है (आकृति देखें।)



(C) दो समुच्चयों का अंतर :

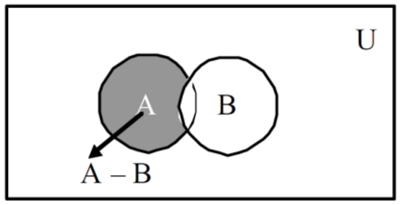
यदि A और B दो समुच्चय हो, तो A और B का अंतर A के उन सभी अवयवो का समुच्चय होता है जो B से संबंधित नहीं हैं।

इस प्रकार $A - B = \{x : x \in A$ और $x \notin B\}$

या $A - B = \{x \in A ; x \notin B\}$

स्पष्ट रूप से $x \in A - B \Leftrightarrow x \in A$ और $x \notin B$

इसे वेन आरेखों के माध्यम से निरूपित किया जा सकता है।

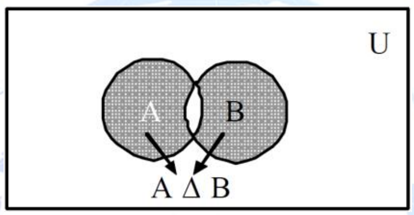


(D) दो समुच्चयों का सममित अंतर :

उन अवयवो का समुच्चय जो A और B के अंतर (A – B) और B तथा A का अंतर (B – A) के सम्मिलन से प्राप्त होता है, दो समुच्चय A और B का सममित अंतर कहलाता है और इसे $(A \Delta B)$ द्वारा निरूपित किया जाता है

इस प्रकार $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

आकृति में वेन आरेख के माध्यम से निरूपण दिया गया है।



11. विभिन्न समुच्चयों में अवयवो की संख्या (NUMBER OF ELEMENTS IN DIFFERENT SETS) :

यदि A, B और C परिमित समुच्चय हैं और U परिमित सार्वत्रिक समुच्चय हो, तो

(i) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(ii) $n(A \cup B) = n(A) + n(A)$ (यदि A और B असंयुक्त समुच्चय हैं)

(iii) $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$

(iv) $n(A \Delta B) = n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A) + n(B) - 2n(A \cap B)$

(v) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(vi) $n(A' \cup B') = n(A \cap B)' = n(U) - n(A \cap B)$

(vii) $n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B)$

12. दो समुच्चयो का कार्तीय गुणनफल (CARTESIAN PRODUCT OF TWO SETS)

A से B का कार्तीय गुणनफल एक ऐसा समुच्चय होता है जिसमें अवयव क्रमित युग्म (a, b) के रूप में इस प्रकार हैं कि $a \in A$ और $b \in B$ है इसे $A \times B$ से निरूपित किया जाता है।

अर्थात $A \times B = \{(a, b) : a \in A$ और $b \in B\}$

यदि समुच्चय $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ और $B = \{b_1, b_2\}$ हो, तो

$A \times B$ और $B \times A$ को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$A \times B = \{(a, b) : a \in A$ और $b \in B\}$ और $B \times A = \{(b, a) ; b \in B$ और $a \in A\}$

$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$

$B \times A = \{(b_1, a_1), (b_1, a_2), (b_1, a_3), (b_2, a_1), (b_2, a_2), (b_2, a_3)\}$

स्पष्ट रूप से $A \times B \neq B \times A$ जब तक A और B बराबर नहीं होते है।

- कार्तीय गुणन क्रमविनिमेय नही होता है।

DETECTIVE MIND

1. यदि $n(A) = m$ और $n(B) = n$ हो, तो $(A \times B)$ में अवयवो की संख्या $= m \times n$ है।
2. चूँकि $A \times B$ में (a, b) प्रकार के ऐसे सभी क्रमित युग्म सम्मिलित होते है जहाँ कि $a \in A$ और $b \in B$ हो, इसका अर्थ है कि इसमें सभी संभावनाएँ शामिल होती हैं जिसमें समुच्चय A के अवयवो को समुच्चय B के अवयवो से जोड़ा जा सकता है। अतः, $A \times B$ को समुच्चय A से समुच्चय B में परिभाषित सबसे बड़ा संभावित संबंध कहा जाता है, जिसे A से B में सार्वत्रिक संबंध भी कहा जाता है।

13. समुच्चयो पर बीजगणितीय संक्रियाएँ (ALGEBRAIC OPERATIONS ON SETS)

(A) वर्गसम संक्रिया :

किसी समुच्चय A के लिए, हमारे पास है। (i) $A \cup A = A$ और (ii) $A \cap A = A$

प्रमाण : (i) $A \cup A = \{x : x \in A$ या $x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$

(ii) $A \cap A = \{x : x \in A$ ओर $x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$

(B) तत्समक संक्रिया :

किसी भी समुच्चय A के लिए हमारे पास है।

(i) $A \cup \phi = A$ और

(ii) $A \cap U = A$ अर्थात ϕ और U क्रमशः सम्मिलन और सार्वनिष्ट के लिए तत्समक अवयव हैं।

प्रमाण : (i) $A \cup \phi = \{x : x \in A$ या $x \in \phi\}$

$= \{x : x \in A\} = A$

(ii) $A \cap U = \{x : x \in A$ और $x \in U\}$

$= \{x : x \in A\} = A$

(C) क्रम विनिमय सक्रिया:

किसी भी समुच्चय A और B के लिए, हमारे पास है।

(i) $A \cup B = B \cup A$ और (ii) $A \cap B = B \cap A$

अर्थात सम्मिलन और सर्वनिष्ठ क्रम विनिमय होते हैं।

(D) साहचर्य संक्रिया:

यदि A, B और C कोई तीन समुच्चय हो, तो

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

अर्थात सम्मिलन और सर्वनिष्ठ साहचर्य होते हैं।

(E) वितरण संक्रिया:

यदि A, B और C कोई तीन समुच्चय हो, तो

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

अर्थात सम्मिलन और सर्वनिष्ठ क्रमश: सर्वनिष्ठ और सम्मिलन पर वितरणात्मक हैं।

(F) डी–मॉर्गन का सिद्धांत:

यदि A और B कोई दो समुच्चय हो, तो

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

प्रमाण : (i) मान लीजिए कि x, $(A \cup B)'$ का एक स्वेच्छ अवयव हो, तो $x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B)$

$\Rightarrow x \notin A$ और $x \notin B \Rightarrow x \in A' \cap B'$

पुनः माना कि $A' \cap B'$ का एक स्वेच्छ अवयव हो, तो $x \in A' \cap B'$ है।

$\Rightarrow x \in A'$ और $y \in B' \Rightarrow x \notin A$ और $y \notin B$

$\Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \in (A \cup B)'$

$\therefore A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

अतः $(A \cup B)' = A' \cap B'$

इसी प्रकार (ii) भी सिद्ध किया जा सकता है।

SOLVED EXAMPLES

Example: 1 यदि समुच्चय A = {a, b, c} हो, तो समुच्चय A के उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए और A के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय का भी उल्लेख कीजिए।

Solution: चूँकि n(A) = 3 है।

$\therefore$ A के उपसमुच्चयों की संख्या $2^3 = 8$ है।

और उन सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय P(A) घात समुच्चय के रूप में नामित है

P(A):{ϕ,{a},{b},{c},{a,b},{b,c},{a,c},{a,b,c}}

Example: 2 दर्शाइए कि n {P[P(ϕ)]} = 4 है।

Solution: हमारे पास है P(ϕ) = {ϕ} $\therefore$ P(P(ϕ)) = {ϕ, {ϕ}}

$\Rightarrow$ P[P(P(ϕ))] = { ϕ, {ϕ}, {{ϕ}}, {ϕ, {ϕ}}}.

अतः, n{P[P(ϕ)]} = 4

Example: 3 यदि $A = \{x : x = 2n + 1, n \in Z\}$ और $B = \{x : x = 2n, n \in Z\}$ हो, तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

Solution: $A \cup B$ = {x : x एक विषम पूर्णांक है} $\cup$ {x : x एक सम पूर्णांक है} = {x : x एक पूर्णांक है} = Z

Example: 4 यदि $A = \{x : x = 3n, n \in Z\}$ और

$B = \{x : x = 4n, n \in Z\}$ हो, तो $A \cap B$ ज्ञात कीजिए।

Solution: हमारे पास है,

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x = 3n, n \in Z$ और $x = 4n, n \in Z$

$\Leftrightarrow$ x, 3 का गुणज है और x, 4 का गुणज है

$\Leftrightarrow$ x, 3 और 4 दोनों का गुणज है।

$\Leftrightarrow$ x, 12 का गुणज है $\Leftrightarrow x = 12n, n \in Z$

अतः, $A \cap B = \{x : x = 12n, n \in Z\}$

Example: 5 यदि A और B दो समुच्चय जिनमें क्रमशः 3 और 6 अवयव हैं, $A \cup B$ में अवयवो की न्यूनतम संख्या क्या हो सकती है? $A \cup B$ में अवयवो की अधिकतम संख्या भी ज्ञात कीजिए।

Solution: हम जानते है $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

जो दर्शाता है कि $n(A \cup B)$ न्यूनतम या अधिकतम होगा यदि $n(A \cap B)$ क्रमशः अधिकतम या न्यूनतम है।

स्थिति - I

जब $n(A \cap B)$ न्यूनतम हो, अर्थात, $n(A \cap B) = 0$ है।

यह तभी संभव है जब $A \cap B = \phi$ हो।

इस स्थिति में,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - 0 = n(A) + n(B) = 3 + 6 = 9$

अतः $A \cup B$ में अवयवो की अधिकतम संख्या 9 होती है।

स्थिति - II

जब $n(A \cap B)$ अधिकतम हो।

यह तभी संभव है जब $A \subseteq B$ हो, इस स्थिति मे $n(A \cap B) = 3$

$\therefore \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= (3 + 6 - 3) = 6$

अतः $A \cup B$ में अवयवो की न्यूनतम संख्या 6 होती है।

Example: 6 यदि $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ और $B = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ हो, तो $A - B$ और $B - A$ ज्ञात कीजिए।

Solution: $A - B = \{2, 4, 6\}$ और $B - A = \{9, 11, 13\}$

Example: 7 यदि A में अवयवो की संख्या m है और B में अवयवो की संख्या n हो, तो ज्ञात कीजिए।

(i) $A \times B$ के घात समुच्चय में अवयवो की संख्या।

(ii) A से B तक परिभाषित संबंध की संख्या।

Solution: (i) चूँकि $n(A) = m; n(B) = n$

तब $n(A \times B) = mn$

अतः $A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^{mn}$

$\Rightarrow \quad n(P(A \times B)) = 2^{mn}$

(ii) A से B तक परिभाषित संबंधों की संख्या $= 2^{mn}$

कोई संबंध जिसे समुच्चय A से समुच्चय B तक परिभाषित किया जा सकता है, $A \times B$ का उपसमुच्चय होगा।

$\because$ $A \times B$ सबसे बडा संभावित संबंध $A \to B$ है।

$\therefore$ $A \to B$ से संबंध की संख्या = समुच्चय $(A \times B)$ के उपसमुच्चयों की संख्या।

Example: 8 मान लीजिए कि A और B दो अरिक्त समुच्चय हैं जिनमें n अवयव उभयनिष्ठ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A \times B$ और $B \times A$ में n^2 अवयव उभयनिष्ठ होते हैं।

Solution: हमारे पास $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ है।

C को B से और D को A से प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते है।

$\Rightarrow \quad (A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$

यह दिया गया है कि $A \cap B$ में n अवयव हैं अतः $(A \cap B) \times (B \cap A)$ में n^2 अवयव होते है।

परन्तु $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$

$\therefore$ $(A \times B) \cap (B \times A)$ के n^2 अवयव हैं।

अत: $A \times B$ और $B \times A$ में n^2 उभयनिष्ट अवयव होते है।

Example: 9 माना A = {x : x संख्या 3591 में एक अंक x है}, $B = \{x : x \in N, x < 10\}$ निम्नलिखित में से कौनसा कथन असत्य है?

(1) $A \cap B = \{1, 3, 5, 9\}$ (2) $A - B = \phi$

(3) $B - A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$ (4) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 9\}$

Solution: दिया है $A = \{1, 3, 5, 9\}$ और $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ है।

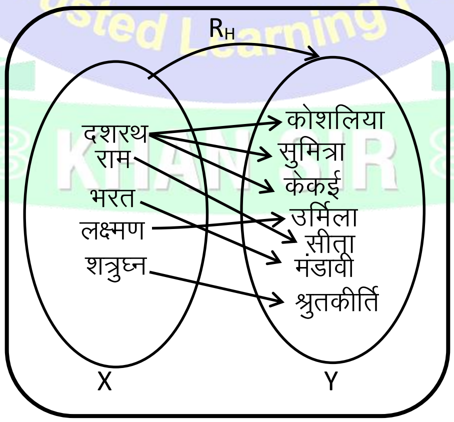
अब $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ ज्ञात कीजिए।

---

14. संबंध की परिभाषा (DEFINITION OF RELATION)

समुच्चय X से Y $(R : X \to Y)$ में एक संबंध समुच्चय X से समुच्चय Y के बीच एक सबंध है जिसके द्वारा X के कुछ या अधिक अवयव Y के कुछ या अधिक अवयवो से जुडे होते हैं। अतः एक संबंध (या द्विआधार संबंध) R, एक अरिक्त समुच्चय X से दूसरे अरिक्त समुच्चय Y, $X \times Y$ का उपसमुच्चय है अर्थात $A \times B$ के उप समुच्चय, A से B मे संबंध कहलाते है।

उदाहरण के लिए एक समुच्चय X और Y अयोध्या राज्य के शाही परिवार के सभी पुरुषों और महिलाओं सदस्यों के समुच्चय के रूप पर विचार करें, X = {दशरथ, राम, भरत, लक्ष्मण, शत्रुघ्न} और Y = {कोशलिया, केकई, सुमित्रा, सीता, मांडवी, उर्मिला, श्रुतकीर्ति} और एक संबंध R_H को समुच्चय X से समुच्चय Y तक "के पति" के रूप में परिभाषित किया गया है।



तब R_H = {(दशरथ, कोशलिया), (राम, सीता), (भरत, मंडावी), (लक्ष्मण, उर्मिला), (शत्रुघ्न, श्रुकीर्ति), (दशरथ, केकई), (दशरथ, सुमित्रा)}

DETECTIVE MIND

(i) यदि a, b से संबंधित हो, तो प्रतीकात्मक रूप से इसे a R b के रूप में लिखा जाता है जहाँ a पूर्व–प्रतिबिम्ब है और b प्रतिबिम्ब है।

(ii) यदि a, b से संबंधित नहीं हो, तो प्रतीकात्मक रूप से इसे a $\not R$ b के रूप में लिखा जाता है।

(A) संबंध का प्रांत, सह–प्रात और परिसर :

प्रांत : संबंध का **प्रांत** पहले समुच्चय के अवयवो का संग्रह है जो सबंध में भाग ले रहे हैं यानि यह संबंध R के तहत सभी पूर्व–प्रतिबिम्बो का समुच्चय है। जैसे R_H का प्रांत ; {दशरथ, राम, भरत, लक्ष्मण, शत्रुघ्न}

सहप्रांत : समुच्चय Y के सभी अवयव, चाहे वे X के किसी अवयव से संबंधित हों या न हों, सह–प्रांत का निर्माण करते हैं। जैसे Y = {कोशलिया, केकई, सुमित्रा, सीता, मांडवी, उर्मिला, श्रुकीर्ति}, R_H का सहप्रांत है।

परिसर : संबंध का परिसर समुच्चय Y के उन अवयवो का एक समुच्चय है जो सबंध में भाग ले रहे हैं अर्थात सभी प्रतिबिम्बो का समुच्चय है R_H का परिसर : {कोशलिया, केकई, सुमित्रा, सीता, मांडवी, उर्मिला, श्रुतकीर्ति}।

15. संबंधों के प्रकार (TYPES OF RELATIONS)

(A) स्वतुल्य सबंध

$R : X \to Y$ को स्वतुल्य कहा जाता है यदि $x R x \ \forall x \in X$ अर्थात समुच्चय X में प्रत्येक अवयव, स्वयं से संबंधित होना चाहिए अतः $\forall x \in X$; $(x, x) \in R$ हो, तो संबंध R को स्वतुल्य संबंध कहा जाता है।

उदाहरण :– मान लीजिए A = {1,2,3} एक समुच्चय हो, तो

R_1 = {(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (2,1)}, A पर एक स्वतुल्य संबंध है।

लेकिन R_2 = {(1,1), (2,2), (1,3), (2,1)}, A पर एक स्वतुल्य संबंध नहीं है।

(B) तत्समक संबंध:

मान लीजिए X एक समुच्चय है। तब संबंध $I_x = \{(x, x) : x \in X\}$ को X पर तत्समक संबंध कहलाता है। अर्थात X पर संबंध I_x तत्समक संबंध होता है यदि X का प्रत्येक अवयव केवल स्वयं से संबंधित है। जैसे y = x

DETECTIVE MIND

(1) रिक्त संबंध

माना A व B दो अरिक्त समुच्चय है। तथा R, A से B में एक संबंध है। तब R रिक्त संबंध कहलाता है। यदि $R = \phi$ हो।

(2) सार्वत्रिक संबंध

माना A व B दो अरिक्त समुच्चय है। तथा R, A से B में एक संबंध है। तब R सार्वत्रिक संबंध कहलाता है। यदि $R = A \times B$ हो।

(3) सभी तत्समक संबंध, स्वतुल्य होते हैं लेकिन सभी स्वतुल्य संबंध, तत्समक नहीं होते हैं।

(4) यदि संबंध स्वतुल्य, प्रति–सममित, संक्रामक होतो तो वह आंशिक क्रम संबंध कहलाता है।

(C) सममित संबंध

$R : X \to Y$ को सममित सबंध कहा जाता है यदि सभी $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$ हो अर्थात सभी $(x, y) \in R$ के लिए $x R y \Rightarrow y R x$ हो उदाहरण के लिए एक समतल में रेखाओं की लंबवतता सममित संबंध होती है।

(D) सक्रांमक संबंध

$R : X \rightarrow Y$ सक्रांमक है यदि सभी (x, y) और (y, z) $\in$ R के लिए $(x, y) \in R$ और $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$ हो अर्थात x R y और y R z $\Rightarrow$ x R z हो।

(E) प्रति–सममित संबंध

मान लीजिए कि A कोई समुच्चय है। समुच्चय A पर एक संबंध R को एक प्रति–सममित संबंध कहा जाता है यदि सभी a, b $\in$ A के लिए(a, b) $\in$ R और (b, a) $\in$ R $\Rightarrow$ a = b हो उदाहरण के लिए संबंध "उपसमुच्चय का होना "इससे बडा या बराबर है" और "किसी भी समुच्चय A पर तत्समक संबंध" प्रति–सममित संबंध होता हैं।

(F) तुल्यता संबंध

समुच्चय X से समुच्चय Y R ($R : X \rightarrow Y$) को एक तुल्यता संबंध कहा जाता है यदि यह स्वतुल्य, सममित और साथ ही सक्रांमक हो। तुल्यता संबंध को ~ द्वारा निरूपित किया जाता है उदा. संबंध " के बराबर है" त्रिभुजों की समानता, समरूपता, सर्वांगसमता और रेखाओं की समांतरता तुल्यता संबंध हैं।

16. सबंध का प्रतिलोम (INVERSE OF A RELATION)

मान लीजिए कि A, B दो समुच्चय हैं और माना एक समुच्चय A से B का संबंध R है। तब B से A तक R के प्रतिलोभ को R^{-1} द्वारा निरूपित किया जाता है। B से A मे एक सबंध होता है। ओर $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$ से परिभाषित हो स्पष्ट रूप से, $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1}$ है।

R का प्रान्त = R^{-1} का परिसर और

R का परिसर = R^{-1} का प्रान्त

SOLVED EXAMPLES

Example: 11 मान लीजिए R प्राकृत संख्याओ N के समुच्चय पर संबंध R : {(x, y)} : x + 3y = 12 x $\in$ N, y $\in$ N} द्वारा परिभाषित हो,तो ज्ञात कीजिए।

(i) R (ii) R का प्रांत (iii) R का परिसर

Solution: (i) हमारे पास है, x + 3y =12 $\Rightarrow$ x = 12 – 3y

y = 1, 2, 3 रखने पर, हमें क्रमश : x = 9, 6, 3 प्राप्त होता है

y = 4 के लिए, हमें x = 0 $\notin$ N प्राप्त होता है और y > 4, पर x $\notin$ N

$\therefore$ R = {(9, 1), (6, 2), (3, 3)}

(ii) R का प्रांत = {9, 6, 3}

(iii) R का परिसर = {1, 2, 3}

Example: 12 यदि X = $\{x_1, x_2, x_3\}$ और Y = $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ हो, तो ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन–सा स्वतुल्य संबंध है:

(1) $R_1 : \{(x_1, x_1), (x_2, x_2)$ (2) $R_1 : \{(x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3)$

(3) $R_3 :\{(x_1,x_1), (x_2, x_2),(x_3, x_3),(x_1, x_3),(x_2, x_4)$ (4) $R_3 : \{(x_1, x_1), (x_2, x_2),(x_3, x_3),(x_4, x_4)$

Solution: (1) स्वतुल्य नही है क्योंकि $(x_3, x_3) \notin R_1$ (2) स्वतुल्य

(3) स्वतुल्य (4) स्वतुल्य नही है क्योंकि $x_4 \notin X$

Example: 13 यदि x = {a, b, c} और y = {a, b, c, d, e, f} हो, तो ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन सा संबंध सममित संबंध है।

R_1 : { } अर्थात रिक्त संबंध

R_2 : {(a, b)}

R_3 : {(a, b), (b, a)(a, c)(c, a)(a, a)}

Solution: R_1 सममित संबंध है क्योंकि इसमें कोई अवयव नहीं है।

R_2 सममित नहीं है क्योंकि $(b, a) \notin R_2$ और

R_3 सममित है।

Example: 14 यदि x = {a, b, c} और y = (a, b, c, d, e} हो, तो निम्नलिखित में से कौन सा सक्रांमक संबंध होता हैं।

(1) R_1 = { }
(2) R_2 = {(a, a)}
(3) R_3 = {(a, a}, (c, d)}
(4) R_4 = {(a, b), (b, c)(a, c),(a, a), (c, a)}

Solution: (1) R_1 सक्रांमक संबंध है क्योंकि यह रिक्त संबंध है।
(2) R_2 सक्रांमक संबंध है क्योंकि सभी एकल संबंध सक्रांमक हैं।
(3) R_3 सक्रांमक संबंध है
(4) R_4 सक्रांमक संबंध नही है

Example: 15 सिद्ध कीजिए सभी पूर्णांक संख्याओं के समुच्चय Z पर परिभषित संबंध R, $(x, y) \in R \Leftrightarrow x - y$, n से विभाजित है। एक तुल्यता संबंध है।

Solution: हम निम्नलिखित गुणधर्मो का निरीक्षण करते हैं:

स्वतुल्यता:

किसी भी $a \in Z$ के लिए, हमारे पास है

$a - a = 0 \times n \Rightarrow a - a$, n से विभाजित है $\Rightarrow (a, a) \in R$

इस प्रकार सभी Z के लिए $(a, a) \in R$ होता है अतः, R, Z पर स्वतुल्य है।

सममितता:

यदि (a – b), n से विभाजित है तो (b – a) भी n से विभाजित होगा।

अत: सभी $a, b, \in Z$ के लिए $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ है।

अत: R, Z पर सममित है।

संक्रामकता:

मान लीजिए $a, b, c \in Z$ इस प्रकार है कि $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R$ हो

यदि $(a, b) \in R \Rightarrow (a - b)$, n से विभाजित है।

तथा $(b, c) \in R \Rightarrow (b - c)$, n से विभाजित है।

अब, $(a - b) + (b - c) = a - c$, जो n से विभाजित होगा अत : a R c होगा।

इसलिए सभी $a, b, c \in Z$ के लिए $(a, b) \in R$ और $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ है। अतः R, Z पर सक्रांमक संबंध है।

इस प्रकार, R स्वतुल्य सममित और सक्रांमक होने के कारण Z पर एक तुल्यता संबंध है।

Example: 16 वास्तविक संख्या x और y के लिए, हम xRy को परिभाषित करते है यदि $x - y + \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। संबंध R है

(1) स्वतुल्य
(2) सममित
(3) सक्रांमक
(4) इनमें से कोई नहीं

Solution: $x \in R \Rightarrow x - x + \sqrt{5} = \sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है,

$\therefore (x, x) \in R$

R स्वतुल्य है

$(\sqrt{5}, 1) \in R$ क्योंकि $\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 1$ है जो एक अपरिमेय संख्या है।

साथ ही, $(1, \sqrt{5}) \in R$ यदि $1 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 1$, है जो एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

$\therefore \quad (1, \sqrt{5}) \notin R$

$\therefore$ R सममित नहीं है।

यहाँ $(\sqrt{5}, 1), (1, 2\sqrt{5}) \in R$ है क्योंकि $\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} - 1$ और $1 - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 1 - \sqrt{5}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं। साथ ही $(\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$ के लिए $\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0$ है जो एक अपरिमेय संख्या नहीं है।

$\because \quad (\sqrt{5}, 2\sqrt{5}) \notin R$

∴ R सक्रांमक नहीं है।

Example: 17 एक तल में दो बिंदु A और B संबंधित होते है यदि OA = OB हो, जहाँ O एक निश्चित बिंदु है। यह संबंध है।

(1) स्वतुल्य परंतु सममित नहीं
(2) सममित परंतु सक्रांमक नहीं
(3) एक तुल्यता संबंध
(4) इनमें से कोई नहीं

Solution: मान लीजिए इस संबंध को R से निरूपित करते हैं।

किसी भी बिंदु A के लिए, OA = OA होता है।

∴ $(A, A) \in R$.

अत: R स्वतुल्य है

माना $(A, B) \in R \Rightarrow OA = OB$

$\Rightarrow OB = OA \Rightarrow (B, A) \in R$

∴ R सममित है

माना $(A, B), (B, C) \in R \Rightarrow OA = OB, OB = OC$

$\Rightarrow OA = OC \Rightarrow (A, C) \in R$

∴ R सक्रांमक है

इस प्रकार, R स्वतुल्य, सममित और सक्रांमक होने के कारण एक तुल्यता संबंध है।

Example: 18 मान लीजिए S, एक अरिक्त समुच्चय है। P(S) में, माना R, $ARB \Leftrightarrow A \cap B \neq \phi$ के रूप में परिभाषित एक संबंध है तब संबंध R है

(1) स्वतुल्य
(2) सममित
(3) सक्रांमक
(4) इनमें से कोई नहीं

Solution: दिया गया संबंध केवल सममित है क्योंकि $A \cap B \neq \phi$ है अर्थात $B \cap A \neq \phi$.है। $(A \cap B = B \cap A)$

Example: 19 मान लीजिए कि n अवयवो वाले परिमित समुच्चय A में R एक तुल्यता संबंध है। तब R में क्रमित युग्मों की संख्या है

(1) n से कम
(2) n से कम या उसके बराबर
(3) n से अधिक
(4) n से अधिक या बराबर

Solution: हमारे पास है $n(A) = n$

∴ R, A में एक तुल्यता संबंध है।

∴ R स्वतुल्य है।

∴ $(a, a) \in R \; \forall \; a \in A$

(a, a) प्रकार के अवयव संख्या में n हैं, क्योंकि n (A) = n है।

∴ R में कम से कम n अवयव होने चाहिए।

Example: 20 R × R में (a, b) R (c, d) द्वारा परिभाषित एक संबंध R है यदि और केवल यदि a – c एक पूर्णांक है और b = d है। संबंध R है

(1) तत्समक संबंध (2) सार्वत्रिक संबंध (3) एक तुल्यता संबंध (4) इनमें से कोई नहीं

Solution: हमारे पास है R = {((*a*, *b*), (*c*, *d*)) : $a - c \in Z$ और $b = d$; $a, b, c, d \in R$}.

माना $(a, b) \in R \times R$

$\therefore$ (a, b) R (a, b), क्योकि $a - a = 0 \in Z$ और $b = b$ है।

$\therefore$ R स्वतुल्य है।

माना (a, b) R (c, d) $\Rightarrow$ $a - c \in Z$ और b = d

$\Rightarrow$ $c - a \in Z$ और d = b $\Rightarrow$ (c, d) R (a, b)

$\Rightarrow$ R सममित है।

माना (a, b) R (c, d) और (c, d) R (e, f) है

$\Rightarrow$ $a - c \in Z, b = d, c - e \in Z, d = f$

$\Rightarrow$ $(a - c) + (c - e) \in Z, b = f$

$\Rightarrow$ $a - e \in Z, b = f$ $\Rightarrow$ (a, b) R (e, f)

$\Rightarrow$ R सक्रामंक है।

$\therefore$ R एक तुल्यता संबंध है।