Chapter 02 अनुक्रम तथा श्रेणी (Sequence and Series)

CONTENT

1. परिचय (Introduction)
2. समांतर श्रेणी (Arithmetic Progression)
3. समांतर माध्य (Arithmetic Mean)
4. गुणोत्तर श्रेणी (Geometric Progression)
5. गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)
6. हरात्मक श्रेणी (Harmonic progression)
7. हरात्मक माध्य (Harmonic mean)
8. AM, GM और HM के बीच संबंध (Relation between AM, GM & HM)
9. समांतर – गुणोत्तर श्रेणी (Arithmetic Geometric Progression)
10. विविध अनुक्रम (Miscellaneous Sequences)

1. परिचय (INTRODUCTION) :

संख्याओं $t_1, t_2, ... t_n$ के किसी निश्चित नियम के अनुसार बनने वाले क्रमाको को अनुक्रम कहते हैं । एक अनुक्रम प्राकृत संख्याओं का एक फलन है जिसमें सहप्रांत सम्मिश्र संख्याओं या वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के रूप में होता है।

अनुक्रम का प्रांत = N

यदि अनुक्रम का परिसर $\subseteq R \Rightarrow$ वास्तविक अनुक्रम

यदि अनुक्रम का परिसर $\subseteq C \Rightarrow$ सम्मिश्र अनुक्रम

अनुक्रम को परिमित या अनंत कहा जाता है, यह इस बात पर निर्भर करता है कि इसके पदों की संख्या क्रमशः परिमित या अनंत है।

उदाहरणः 2, 3, 5, 7, 11, ... अभाज्य संख्याओं का एक अनुक्रम है। यह एक अनंत अनुक्रम है।

श्रेणी एक अनुक्रम है जिसके पद एक निश्चित स्वरूप में होते हैं जैसेः 1, 4, 9, 16, ... हालांकि, अनुक्रम में हमेशा अगले पद का स्पष्ट सूत्र नहीं हो सकता है। श्रेणी का निर्माण एक अनुक्रम के पदों को जोड़कर या घटाकर किया जाता है जैसे– $2+4+6+8$ एक श्रेणी है। nवें स्थान पर स्थित पद को T_n द्वारा निरूपित किया जाता है और इसे अनुक्रम या श्रेणी या श्रेणी का सामान्य पद कहा जाता है।

श्रेणी को 5 भागों में वर्गीकृत किया जा सकता है–

(i) समांतर श्रेणी (A.P) (ii) गुणोत्तर श्रेणी (G.P)

(iii) हरात्मक श्रेणी (H.P) (iv) समांतर–गुणोत्तर श्रेणी (AGP)

(v) विविध श्रेणी

2. समांतर श्रेणी (ARITHMETIC PROGRESSION (A.P.))

समांतर श्रेणी को एक श्रेणी के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसमें किन्हीं दो क्रमागत पदों के बीच का अंतर पूरी श्रेणी में स्थिर रहता है। इस स्थिर अंतर को सार्व अंतर कहा जाता है यदि 'a' पहला पद है और 'd' सार्व अंतर है,तो एक AP को इस प्रकार लिखा जा सकता है–

$a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + ...$

2.1 सामान्य पद/nवां पद/A.P का अंतिम पद–

यह $T_n = a + (n - 1)d$ द्वारा दिया गया है

जहाँ a = पहला पद, d = सार्वअंतर और n = उस पद की स्थिति जिसकी हमें आवश्यकता है।

Note- (i) यदि $d > 0 \Rightarrow$ बढ़ती हुई A.P.

यदि $d < 0 \Rightarrow$ घटती A.P.

यदि $d = 0 \Rightarrow$ सभी पद समान रहते हैं

(ii) अंत से nवें पद को निम्नलिखित द्वारा दिया गया है

$\ell = T_m - (n - 1)\ d$

या $\ell =$ शुरुआत से $(m - n + 1)$ वां पद। जहां m पदों की कुल संख्या है।

2.2 A.P. के n पदों का योगः

किसी A.P. के पहले n पदों का योग निम्न द्वारा दिया गया है।

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\,d]$ या $S_n = \frac{n}{2}[a+T_n]$

(i) यदि n पदों का योग S_n द्वारा दिया जाता है तब सामान्य पद $T_n = S_n - S_{n-1}$ दिया जाता है, जहां S_{n-1}, AP के (n-1) पदों का योग है।

(ii) AP का सार्व अंतर $d = S_2 - 2S_1$ द्वारा दिया जाता है जहां S_2 पहले दो पदों का योग है और S_1 किसी AP के पहले पद या पहले पद का योग है।

(iii) एक AP के अनंत पदों का योग ∞ है यदि $d > 0$ और $-\infty$ है यदि $d < 0$.

DETECTIVE MIND

- किसी AP के n पदों का योग $An^2 + Bn$ के रूप में होता है यानी n में एक द्विघात व्यंजक ऐसी स्थिति में सार्व अंतर n^2 के गुणांक का दोगुना होता है यानी 2A
- किसी AP का nवां पद $An+B$ के रूप में होता है अर्थात n में एक रैखिक व्यंजक ऐसी स्थिति में n का गुणांक AP का सार्व अंतर होता है।

2.3 AP की मुख्य विशेषताएं–

(i) पहला पद और सार्व अंतर शून्य, धनात्मक या ऋणात्मक या (कोई भी सम्मिश्र संख्या) हो सकता है

(ii) यदि a, b, c, AP में है $\Rightarrow 2b = a + c$ और यदि a, b, c, d AP में हैं $\Rightarrow a + d = b + c$

(iii) AP में तीन संख्याओं को $a-d, a, a+d$ के रूप में लिया जा सकता है

AP में चार संख्याओं को $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ के रूप में लिया जा सकता है।

A. P. में पाँच संख्याओ को हैं $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$

AP में छह पद $a-5d, a-3d, a-d, a+d, a+3d, a+5d$ आदि।

(iv) आरंभ और अंत से समान दूरी पर AP के पदों का योग स्थिर है और प्रथम और अंतिम पदों के योग के बराबर होता है।

(v) AP का कोई भी पद (पहले को छोड़कर) उन पदों के योग के आधे के बराबर होता है जो इससे समान दूरी पर होते हैं।

$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-k} + a_{n+k})$, $k < n$. For $k = 1$, $a_n = (\frac{1}{2})(a_{n-1} + a_{n+1})$;

$k = 2$ के लिए $a_n = (1/2)(a_{n-2} + a_{n+2})$ इत्यादि।

(vi) यदि किसी AP के प्रत्येक पद को समान अशून्य संख्या से बढ़ाया, घटाया, गुणा या विभाजित किया जाता है, तो परिणामी अनुक्रम भी एक AP होता है।

(vii) दो AP का योग और अंतर एक AP होता है।

3. समांतर माध्य (A.M.)

यदि AP में तीन या तीन से अधिक पद हैं, तो पहले और अंतिम पदों के बीच की संख्याएँ उनके बीच समांतर माध्य के रूप में जाना जाती है। अर्थात दो दी गई संख्याओं a और b के बीच AM, A है, तो a, A, b AP में होंगे।

अतः $A - a = b - A \Rightarrow A = \frac{a+b}{2}$

Note : किसी भी n धनात्मक संख्याओं $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ का AM है

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots a_n}{n}$$

दो दी गई संख्याओं के बीच n,AM:–

यदि दो संख्याओं 'a' और 'b' के बीच में हमें n,AM $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ डालने है फिर, a, $A_1, A_2, A_3 \ldots\ldots A_n$, b, AP में होगा। श्रेणी में (n + 2) पद हैं और अंतिम पद b है और पहला पद a है।

$\Rightarrow \quad a + (n + 2 - 1)\ d = b$

$\Rightarrow \quad d = \frac{b-a}{n+1}$

$A_1 = a + d, A_2 = a + 2d, \ldots. A_n = a + nd$ या $A_n = b - d$

DETECTIVE MIND

➢ a और b के बीच डाले गए n, AM का योग a और b के बीच एकल AM के n गुणा के बराबर है,

अर्थात = $\sum_{r=1}^{n} A_r = nA$ जहां $A = \frac{a+b}{2}$

SOLVED EXAMPLES

Ex.1 एक AP में यदि $a_2 + a_5 - a_3 = 10$ और $a_2 + a_9 = 17$ हो तो पहला पद और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

Sol. एक A.P में

माना a_1= पहला पद और d = सार्व अंतर

$a_2 + a_5 - a_3 = 10$

$a_1 + d + a_1 + 4d - (a_1 + 2d_1) = 10$

$a_1 + 3d_1 = 10$ ...(i)

$a_2 + a_9 = 17$

$a_1 + d + a_1 + 8d_1 = 17$

$2a_1 + 9d_1 = 17$ ...(ii)

समी (i) और (ii) को हल करने पर हमें प्राप्त होता है

$a_1 = 13$ $d = -1$

Ex.2 एक AP का पहला पद 5 है, अंतिम 45 है, और योग 400 है। पदों की संख्या और सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

Sol. $a = 5$, $\ell = 45$

माना सार्व अंतर = d

$a + (n - 1)d = 45$

$S_n = 400 \Rightarrow \frac{n}{2}[a+\ell] = 400$

$\frac{n}{2}[5+45] = 400$

$n = 16$

$a + (n - 1)d = 45$

$5 + 15d = 45 \Rightarrow d = \frac{8}{3}$

Ex.3 समीकरण $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots\ldots + (x + 28) = 155$ को हल करें।

Sol. हमारे पास है,

$(x + 1) + (x + 4) + \ldots\ldots + (x + 28) = 155$

मान लीजिए n, LHS में AP में पदों की संख्या है, तब,

$$\begin{cases} x+28 = (x+1)+(n-1)3 \\ \Rightarrow n = 10 \end{cases}$$

$(x + 1) + (x+ 4) + \ldots \ldots + (x + 28) = 155$

$\Rightarrow \frac{10}{2}\left[(x+1)+(x+28)\right] = 155$

$\Rightarrow x = 1$

Ex.4 अनुक्रम $20 + 19\frac{1}{3} + 18\frac{2}{3} + \ldots\ldots\ldots$ के कितने पद लिये जाने चाहिए ताकि योग 300 हो। दोहरे उत्तर का कारण स्पष्ट करें।

Sol. $20 + 19\frac{1}{3} + 18\frac{2}{3} + \ldots\ldots\ldots$

$a = 20$, $d = \frac{-2}{3}$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

$300 = \frac{n}{2}\left[2\times 20 + (n-1)\left(\frac{-2}{3}\right)\right]$

$300 = 20n - \frac{n(n-1)}{3}$

$n^2 - 61n + 900 = 0$

$n = 25, 36$

हमें n के दो मान मिले हैं क्योंकि जब n = 25 सभी पद धनात्मक होंगे, लेकिन n = 36 होने पर पद ऋणात्मक हो जाएंगे।

Ex.5 दो AP के n पदों का योग 7n+ 1: 4n+ 27 के अनुपात में है, उनके 11वें पदों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

Sol. माना दो श्रेणी $a_1, a_1 + d_1, a + 2d_1 \ldots\ldots$ और $a_2, a_2 + d_2, a_2 + 2d_2, \ldots \ldots$

$S_1 = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d_1\right]$

$S_2 = \frac{n}{2}\left[2a_2 + (n-1)d_2\right]$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{7n+1}{4n+27} \Rightarrow \frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{7n+1}{4n+27}$

$$\frac{a_1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d_1}{a_2 + \left(\frac{n-1}{2}\right)d_2} = \frac{7n+1}{4n+27}$$

$T_{11} = a + 10d$

तो 11वें पद का अनुपात ज्ञात करेगे।

$\frac{(n-1)}{2} = 10$ रखने पर

$n = 21$

$$\frac{a_1 + 10d_1}{a_2 + 10d_2} = \frac{7(21)+1}{4(21)+27} = \frac{4}{3}$$

Ex.6 एक AP के पहले 3 पदों का योग 27 है और उनके वर्गों का योग 293 है S_{15} का निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए।

Sol. माना पद

$a - d, a, a + d$ हैं

KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR

3a = 27
a = 9
$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 293$
$3a^2 + 2d^2 = 293$
$2d^2 = 50$
$d = \pm 5$
जब d = 5 हो तो AP 4, 9, 14,……… होता है।

$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2 \times 4 + 14 \times 5] = 585$

जब d = –5 तब AP है 14,9,4,……….

$\Rightarrow S_{15} = \frac{15}{2}[2 \times 14 + 14\times(-5)] = -315$

$\Rightarrow |S_{15}| = 315$

Ex.7 अनुक्रम की प्रकृति और 30वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका n पदों का योग $5n^2 + 2n$ है

Sol. $S_n = 5n^2 + 2n$
$S_{n-1} = 5(n-1)^2 + 2(n-1)$
$T_n = S_n - S_{n-1} = 5(2n-1) + 2 = 10n - 3$
श्रेणी = 7, 17, 27, 37……
श्रेणी A.P. है
$T_{30} = 10 \times 30 - 3 = 297.$

Ex.8 यदि a^2, b^2, c^2 AP में हैं तो सिद्ध कीजिए कि

(a) $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$. A.P में हैं

(b) $\frac{a}{b+c},\frac{c}{c+a},\frac{c}{a+b}$ A.P में हैं

Sol. (a) माना $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ AP में हैं

$\frac{2}{c+a}=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}$

$2(a+b)(b+c) = (c+a)(2b+a+c)$
$2b^2 = a^2 + c^2$
अतः यदि a^2, b^2, c^2 A.P में हैं, तो

$\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$ AP - में हैं

(b) यदि a^2, b^2, c^2 में AP में हैं तो $\frac{1}{b+c},\frac{1}{c+a},\frac{1}{a+b}$

(पहले साबित हुआ)
प्रत्येक पद a + b + c से गुणा करें

$\frac{a+b+c}{b+c},\frac{a+b+c}{c+a},\frac{a+b+c}{a+b}$

प्रत्येक पद में से 1 घटाएं

$\frac{a}{b+c},\frac{b}{c+a},\frac{c}{a+b}$ AP में हैं

Ex.9 20 AM's को 4 से 67 के बीच डालें।

Sol. a = 4, b = 67, n = 20 $d=\frac{b-a}{n+1}=\frac{67-4}{21}=3$

$A_1 = a + d = 4 + 3 = 7$
$A_2 = a + 2d = 4 + 6 = 13$
$A_3 = 19$
$A_4 = 25$
$A_{20} = a + 20d = 4 + 20\times3 = 64$
अतः 4,7,10,13,161 ……….67 हल प्राप्त हुआ।

Ex.10 यदि p समांतर माध्य को 5 और 41 के बीच इस प्रकार डाला जाए कि अनुपात $\frac{A_3}{A_{p-1}}=\frac{2}{5}$ तो p का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. a=5, b=41,समांतर माध्यों की संख्या =p

$d=\frac{b-a}{n+1}=\frac{36}{p+1}$

$A_3=a+3d=5+3\left(\frac{36}{p+1}\right)=\frac{5p+5+108}{p+1}$

$A_{p-1}=41-d=41-2\left(\frac{36}{p+1}\right)=\frac{41p-31}{p+1}=\frac{5p+113}{41p-31}=\frac{2}{5}$

$25p + 565 = 82p - 62 \quad \Rightarrow \quad p = 11$

Ex.11 यदि ग्यारह AM, 28 और 10 के बीच डाले जाते हैं, तो पूर्णांक AM की संख्या ज्ञात कीजिए।

Sol. मान लीजिए A_1, A_2, A_3 ……, A_{11} 28 और 10 के बीच ग्यारह AM हैं, इसलिए 28, A_1, A_2, ……A_{11}, 10 AP में हैं मान लीजिए AP का सार्व अंतर d है। पदों की संख्या = 13
अब, $10 = T_{13} = T_1 + 12d = 28 + 12d$

$\Rightarrow d=\frac{10-28}{12}=-\frac{18}{12}=-\frac{3}{2} \Rightarrow$ अतः पूर्णांक AM की संख्या 5 है।

Ex.12 यदि किसी AP के n, 2n, 3n पदों का योग क्रमशः S_1, S_2, S_3, है तो $\frac{S_3}{S_2-S_1}$ का मान ज्ञात कीजिए .

Sol. मान लीजिए a पहला पद है और d दिए गए AP का सार्व अंतर है, तो n पदों का योग है

$S_1 = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$

2n पदों का योग,

$S_2 = \frac{2n}{2}\left[2a+(2n-1)d\right]$

3n पदों का योग,

$S_3 = \frac{3n}{2}[2a+(3n-1)d]$

अब, $S_2 - S_1 = \frac{2n}{2}[2a+(2n-1)d] - \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2\{2a+(2n-1)d\} - \{2a+(n-1)\}d]$

$= \frac{n}{2}[2a+(3n-1)d]$

$\Rightarrow 3(S_2 - S_1) = \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d] = S_3$

$\Rightarrow \frac{S_3}{S_2 - S_1} = 3$

[Ans: 3]

Ex.13 संख्याएँ t (t^2+1), $-\frac{t^2}{2}$ और 6 एक AP के लगातार तीन पद हैं यदि t वास्तविक है, तो AP के अगले दो पद ज्ञात कीजिए

Sol. $2b = a + c \Rightarrow -t^2 = t^3 + t + 6$

या $t^3 + t^2 + t + 6 = 0$ या $(t + 2)(t^2 - t + 3) = 0$

$\Rightarrow t^2 - t + 3 = 0 \quad \Rightarrow t = -2$

दी गई संख्याएँ हैं −10, −2, 6

जो d = 8 वाली AP में हैं। अगली दो संख्याएँ 14,22 हैं

Ex..14 यदि a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 सार्व अंतर $\neq 0$, वाले AP में है, तो $\sum_{i=1}^{5} a_i$ का मान ज्ञात कीजिए जब $a_3 = 2$.

Sol. जैसा कि a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 AP में हैं, हमारे पास

$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$.है।

अतः $\sum_{i=1}^{5} a_i = 10.$

Ex.15 यदि a(b + c), b(c + a), c(a + b) AP में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ भी AP में हैं

Sol. a(b + c), b(c + a), c(a + b) A.P.में है

$\Rightarrow$ प्रत्येक में से ab + bc + ca घटाएँ

− bc, − ca, − ab A.P. में हैं

−abc से भाग करें–

$\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ AP में हैं।

Ex.16 यदि $\frac{a+b}{1-ab}$, b, $\frac{b+c}{1-bc}$ AP में हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{a}, b, \frac{1}{c}$ AP में हैं

Sol. $\therefore \frac{a+b}{1-ab}, b, \frac{b+c}{1-bc}$ A.P. में हैं

$b - \frac{a+b}{1-ab} = \frac{b+c}{1-bc} - b \Rightarrow \frac{-a(b^2+1)}{1-ab} = \frac{c(1+b^2)}{1-bc}$

$\Rightarrow -a + abc = c - abc$

$a + c = 2abc$

ac द्वारा विभाजित करें

$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 2b \quad \Rightarrow \frac{1}{a}, b, \frac{1}{c}$ AP में हैं

Ex.17 यदि a, b, c, d, e, f, 2 और 12 के बीच AM's., हैं, तो a + b + c + d + e + f ज्ञात कीजिए।

Sol. AM^s का योग = 6 एकल AM = $\frac{6(2+12)}{2} = 42$

---

4. गुणोत्तर श्रेणी (GEOMETRIC PROGRESSION (G.P.))

एक अनुक्रम में यदि प्रत्येक पद (पहले गैर–शून्य पद को छोड़कर) अपने ठीक पूर्ववर्ती पद के साथ समान स्थिर अनुपात रखता है तो श्रेणी को GP कहा जाता है और स्थिर अनुपात को सार्व अनुपात कहा जाता है।

GP का मानक स्वरूप है

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots\ldots\ldots, ar^{n-1}$.

4.1 सामान्य रूप/nवां पद/ GP का अंतिम पद

यह T_n द्वारा दिया गया है = $a.r^{n-1}$

जहाँ a = पहला पद, r = सार्व अनुपात और n = उस पद की स्थिति जिसकी हमें आवश्यकता है।

4.2 GP के n पदों का योग

एक AP के पहले n पदों का योग दिया जाता है।

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a - rT_n}{1-r}$ जब $r < 1$ या $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{rT_n - a}{r-1}$ जब $r > 1$

तथा $S_n = an$ जब r = 1

4.3 अनंत GP का योग

पहले पद a और सार्व अनुपात r ($-1 < r < 1$ यानी $|r| < 1$) के साथ एक अनंत GP का योग है

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

Note: यदि $r \geq 1$ तब $S_\infty \to \infty$

4.4 GP की मुख्य विशेषताएं:

(i) GP के किसी भी लगातार 3 पदों को a/r, a, ar के रूप में लिया जा सकता है। GP के किसी भी 4 क्रमागत पदों को $\frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}$, ar, ar^3 इत्यादि के रूप में लिया जा सकता है।

(ii) एक परिमित GP में शुरुआत और अंत से समान दूरी वाले पदों का गुणनफल बराबर होता है।

$a_1a_n = a_2a_{n-1} = a_3a_{n-2} = \ldots\ldots$

(iii) यदि a, b, c, GP में है $b^2 = ac$

(iv) यदि GP के प्रत्येक पद को किसी गैर–शून्य संख्या से गुणा या विभाजित या घात में उसी संख्या से बढाएं जाए परिणामी अनुक्रम भी एक GP है।

(v) यदि $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ और $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots$ दो GP हैं जिनका सार्व अनुपात क्रमशः r_1 और r_2 है, तो अनुक्रम a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... भी एक सार्व अनुपात $r_1\ r_2$ के साथ एक GP है।

(vi) यदि a_1, a_2, a_3 GP में हैं जहां प्रत्येक $a_i > 0$, तो $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots\ldots$ AP में हैं और इसका विलोम भी सत्य है

5. गुणोत्तर माध्य (GEOMETRIC MEAN (G.M.)) :

यदि GP में तीन या तीन से अधिक पद हों तो प्रथम और अंतिम पद के बीच आने वाली सभी संख्याएँ उनके बीच गुणोत्तर माध्य कहलाती हैं।

अर्थात दो दी गई संख्याओं a और b के बीच GM, G है, तो a, G, b, GP में है।

अर्थात $\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \Rightarrow G^2 = ab \Rightarrow G = \sqrt{ab}$

Note : (i) किसी भी n धनात्मक संख्याओं $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ का GM $(a_1.a_2.a_3\ldots\ldots a_n)^{1/n}$ है।

(ii) यदि a और b विपरीत चिह्नों की दो संख्याएँ हैं, तो उनके बीच GM मौजूद नहीं होता है।

दो दी गई संख्याओं के बीच n GM

यदि दो संख्याओं 'a' और 'b' के बीच में हमें n GM G_1, G_2----G_n डालना है तो $a, G_1, G_2, \ldots\ldots G_n, b$, GP में होगा। श्रेणी में (n+2) पद हैं और अंतिम पद b है और पहला पद a है।

$\Rightarrow ar^{n+2-1} = b \qquad \Rightarrow r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$G_1 = ar,\ G_2 = ar^2 \ldots\ldots G_n = ar^n$ या $G_n = b/r$

DETECTIVE MIND

➤ 'a' और 'b' के बीच डाले गए n GM का गुणन 'a' और 'b' के बीच एकल GM की nवीं घात के बराबर है

अर्थात $= \prod_{r=1}^{n} G_r = (G)^n$ जहां $G = \sqrt{ab}$

SOLVED EXAMPLES

Ex.18 एक GP में यदि $t_3 = 2$ और $t_6 = -\frac{1}{4}$, t_{10} खोजें।

Sol. $T_3 = 2, \quad T_6 = -\frac{1}{4} \Rightarrow ar^2 = 2,\ ar^5 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{r^3} = -8 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{r} = -2$

$r = \frac{-1}{2} \qquad a = 8$

$t_{10} = ar^9 = 8\left(\frac{-1}{2}\right)^9 = \frac{-1}{64}$

Ex.19 एक GP के चार क्रमागत पद ज्ञात कीजिए जिनका दूसरा पद पहले से 35 छोटा है और तीसरा पद चौथे से 560 बड़ा है।

Sol. माना चार पद

$a, ar, ar^2, ar^3 \quad \Rightarrow \quad a - ar = 35$

$ar^2 - ar^3 = 560 \quad \Rightarrow \quad \frac{a(1-r)}{ar^2(1-r)} = \frac{35}{560}$

$r^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 4$

चूंकि दूसरा पद पहले पद से छोटा है $r = -4$

पद 7, –28, 112, –448. हैं

Ex.20 यदि किसी GP के pवां, qवां और rवां पद क्रमशः x, y और z हैं, तो $x^{q-r} . y^{r-p} . z^{p-q}$ का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. मान लीजिए a और k क्रमशः GP का प्रथम पद और सार्व अनुपात है।

$x = a\, k^{p-1}$

$y = a\, k^{q-1}$

$z = a\, k^{r-1}$

$x^{q-r} \cdot y^{r-p} \cdot z^{p-q}$

$= \left(\frac{x}{z}\right)^q \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^r \cdot \left(\frac{z}{y}\right)^p = \left(k^{p-r}\right)^q \left(k^{q-p}\right)^r \left(k^{r-q}\right)^p =$

$k^{pq-qr+qr-rp+rp-pq} = k^0 = 1$

Ex.21 GP में पदों की संख्या ज्ञात करें यदि $a_1 = 3$, $a_n = 96$ और $S_n = 189$.

Sol. $a_1 = 3$

$a_1 r^{n-1} = 96$

$r^{n-1} = 32$

$\frac{a(1-r^n)}{1-r} = 189 \quad \Rightarrow \quad \frac{3(1-32r)}{1-r} = 189$

$93r = 186 \quad \Rightarrow r = 2$

$2^{n-1} = 32 \quad \Rightarrow \quad n = 6$

Ex.22 $n(n \in N)$ का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए n पदों $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + ...$ तक का योग 9000 से अधिक है।

Sol. $S_n = 1 + 3 + 3^2 + ... + n$ पद

$S_n = \frac{1\cdot(3^{n-1})}{3-1} > 9000$

$3^n - 1 > 18000$

$3^n > 18001$

$n \geq 9$

n = 9 न्यूनतम मान।

Ex.23 एक GP के अनंत पदों का योग 15 है और उनके वर्गों का योग 45 है। श्रेणी ज्ञात कीजिए।

Sol. $a + ar + ar^2 + ar^2 + ... = 15$

$\frac{a}{1-r} = 15 \qquad ...(i)$

$a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2 + ... = 45$

$\frac{a^2}{(1-r^2)} = 45 \qquad ...(ii)$

$\frac{a^2}{(1-r^2)} = 15 \qquad ...(iii)$

$\frac{(1-r)^2}{1-r^2} = \frac{45}{225} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{5}$

$5 - 5r = 1 + r$

$r = 2/3$

$a = 15\left(1 - \frac{2}{3}\right) = 5 \Rightarrow \quad 5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{40}{27}......$

Ex.24 यदि $x = a + a/r + a/r^2 + ... \infty$, $y = b - b/r + b/r^2 - ...... \infty$ और $z = c + c/r^2 + c/r^4 + ... \infty$, तो सिद्ध कीजिए यदि $xy/z = ab/c$

Sol. हमारे पास है,

$x = \frac{a}{1-\frac{1}{r}} = \frac{ar}{1-r}, \quad y = \frac{b}{1-\left(-\frac{1}{r}\right)} = \frac{br}{1+r}$

$z = \frac{c}{1-\frac{1}{r^2}} = \frac{cr^2}{1+r}$

$xy = \left(\frac{ar}{r-1}\right)\left(\frac{br}{r+1}\right) = \frac{abr^2}{r^2-1}$

$\therefore \quad \frac{xy}{z} = \left[\frac{\frac{abr^2}{r^2-1}}{\frac{cr^2}{r^2-1}}\right] = \frac{ab}{c}$

Ex.25 एक GP के पहले 3 क्रमागत पदों का योग 19 है और उनका गुणनफल 216 है। S_{20} ज्ञात कीजिए, यदि मौजूद है तो $S\infty$ भी परिकलित कीजिए।

Sol. माना 3 क्रमागत पद

$\frac{a}{r}, a, ar$

$\frac{a}{r} + a + ar = 19, \qquad \frac{a}{r}\cdot a \cdot ar = 216$

$a^3 = 216$

$a = 6$

$\frac{6}{r} + 6 + 6r = 19$

$6(1 + r + r^2) = 19r$

$6r^2 - 13r + 6 = 0$

$(3r - 2)(2r - 3) = 0$

$r = \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

जब $r=\frac{3}{2}, S_{20}=8\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{20}-1\right]$ तथा S_∞ मौजूद नहीं है।

जब r = $\frac{2}{3}$, $r=\frac{2}{3}, S_{20}=27\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{20}\right)$

तथा $S_\infty=\frac{9}{1-\frac{2}{3}}=2$

Ex.26 यदि a_n = GP का नवां पद और $a_1 + a_2 + a_3 = 13$ और $a_1^2+a_2^2+a_3^2=91$ फिर a_{50}. खोजें।

Sol. दिया गया

$a_1 + a_2 + a_3 = 13$, माना $a_1 = \frac{a}{r}$, $a_2 = a$, $a_3 = ar$

$\frac{a}{r} + a + ar = 13 \Rightarrow a\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=13$

$r+\frac{1}{r}=\frac{13}{a}-1 \Rightarrow r+\frac{1}{r}=\frac{13-a}{a}$

$r^2+\frac{1}{r^2}+2=\left(\frac{13-a}{a}\right)^2$

अब दिया गया है

$a_1^2+a_2^2+a_3^2=91$

$a^2\left(\frac{1}{r^2}+1+r^2\right)=91$

$a^2\left(\frac{(13-a)^2}{a^2}-1\right)=91$

$(13-a)^2-a^2=91 \Rightarrow 13^2-26a=91$

$26a = 169 - 91 \Rightarrow 26a = 78$

$a = 3$

$3r^2 + 3 = 10r \Rightarrow 13r^2 - 19r + 3 = r$

$3r^2 - 9r - r + 3 = 0$

$r = 3, \frac{1}{3}$

जब a = 3 और r = 3 तब $a_{50}= 3\cdot3^{49}=3^{50}$.

और जब a = 3 और r = $\frac{1}{3}$ फिर $a_{50}=\left(\frac{1}{3}\right)^{48}$

Ex.27 परिमेय संख्या $0.4\overline{23}$ की गणना करने के लिए अनंत श्रेणी का प्रयोग करें

Sol. $x = 0.4\overline{23}$

$= 0.4 + 0.023 + 0.00023 + \ldots\ldots = 0.4 + \frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\frac{23}{10^7}+\ldots\ldots$

$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\ldots\ldots\right)$

$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\left(\frac{1}{1-1/100}\right)$

$x = \frac{4}{10}+\frac{23}{990}=\frac{419}{990}$

Ex.28 5 और 160 के बीच 4 GM डालें।

Sol. $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}=\left(\frac{160}{5}\right)^{\frac{1}{5}} = (32)^{1/5}=2$

$G_1 = ar = 10$

$G_2 = 20$

$G_3 = 40$

$G_4 = 80$

Ex.29 यदि दो धनात्मक संख्याओं a और b के बीच AM 15 है और a और b के बीच GM 9 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

Sol. $\frac{a+b}{2} = 15$

$a + b = 30$

$\sqrt{ab}=9 \Rightarrow \sqrt{a(30-a)}=9$

$a(30 - a) = 81$

$a^2 = 30a + 81 = 0$

$a = 3, 27$

इसलिए दो संख्याएँ 3, 27 हैं।

Ex.30 यदि AP के 10वें,15वें, 25वें पद GP में हैं तो GP का सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए

Sol. माना AP का प्रथम पद और सार्व अनुपात क्रमशः a और d है।

$T_{10} = a + 9d$, $T_{15} = a + 14d$, $T_{25} = a + 24d$.

$R = \frac{T_{15}}{T_{10}}=\frac{T_{25}}{T_{15}}$

$R = \frac{a+14d}{a+9d}=\frac{a+24d}{a+14d}\Rightarrow\frac{a+14d-a-24d}{a+9d-a-14d}=2$

Ex.31 श्रेणी 3, $\sqrt{3}$, 1 , ------ का नवां पद -------- $\frac{1}{243}$ है फिर n खोजें

Sol. $3.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}=\frac{1}{243} \Rightarrow n = 13$

Ex.32 एक अनंत GP का पहला पद 1 है और कोई भी पद सभी बाद के पदों के योग के बराबर है। श्रेणी खोजें।

Sol. माना GP $1, r, r^2, r^3, \ldots\ldots$

दी गई शर्त $\Rightarrow$ $r = \frac{r^2}{1-r} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$,

इसलिए श्रेणी है $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots\ldots\ldots \infty$

Ex.33 तीन संख्याएँ एक बढ़ती हुई GP बनाती हैं यदि मध्य संख्या को दोगुना कर दिया जाता है, तो नई संख्याएँ AP में होती हैं GP का सार्व अनुपात है–

Sol. GP में तीन संख्याएँ $\frac{a}{r}$, a, ar

फिर $\frac{a}{r}$, 2a,ar दिए गए अनुसार AP में हैं।

$\therefore \quad 2(2a) = a\left(r + \frac{1}{r}\right)$ या $r^2 - 4r + 1 = 0$

या $r = 2 \pm \sqrt{3}$ या $r = 2 + \sqrt{3}$ बढ़ते हुए GP के लिए (r > 1 के रूप में)

6. हरात्मक श्रेणी (HP) (HARMONIC PROGRESSION (H.P.))

एक अनुक्रम को HP कहा जाता है यदि इसके पदों के व्युत्क्रम AP में हैं। यदि अनुक्रम $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ HP में है तो $1/a_1, 1/a_2, \ldots, 1/a_n$ AP में है

Note : (i) यहां हमारे पास HP के n पदों के योग का सूत्र नहीं है। HP के लिए जिसका पहला पद a और दूसरा पद b है, nवाँ पद $t_n = \dfrac{ab}{b + (n-1)(a-b)}$ है

(ii) यदि a, b, c HP में हैं $\Rightarrow \quad b = \dfrac{2ac}{a+c}$ या $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a-b}{b-c}$.

(iii) यदि a, b, c AP में हैं $\Rightarrow \quad \dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{a}$

(iv) यदि a, b, c GP में हैं $\Rightarrow \quad \dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{b}$

7. हरात्मक माध्य (HM) ((HARMONIC MEAN (H.M.)) :

यदि a,b,c, HP में हैं, तो b को a और c के बीच का HM कहा जाता है, तब $b = \dfrac{2ac}{a+c}$

यदि $a_1\, a_2, \ldots\ldots a_n$ 'n' अशून्य संख्याएं हैं तो इन संख्याओं का HM 'H' द्वारा दिया जाता है

$$\Rightarrow \frac{1}{H} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}\right]$$

8. AM, GM और HM के बीच संबंध (RELATION BETWEEN A.M., G.M. & H.M.)

A,G,H दो संख्याओं 'a' और 'b' के बीच क्रमशः AM, GM और HM हैं

$A = \dfrac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$, $H = \dfrac{2ab}{a+b}$

(ii) माना $A - G = \dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$

इसी तरह $G \geq H \Rightarrow A \geq G \geq H$

(ii) AH पर विचार करें $= \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{2ab}{a+b} = ab = G^2 \Rightarrow \quad G^2 = A.H$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

SOLVED EXAMPLES

Ex.34 यदि $x > 0,\ y > 0, z > 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz$

Sol. $(x+y)(y+z)(z + x)$

$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$

$\Rightarrow (A.M. \geq G.M.)$

$\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}$

$\Rightarrow \frac{z+x}{2} \geq \sqrt{zx}$

$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8} \geq xyz$

(x + y) (y + z) यz + x) $\geq$ 8xy

Ex.35 यदि a+b+c = 3 और a,b,c धनात्मक हैं तो $a^2b^3c^2 \leq \frac{3^{10} \cdot 2^4}{7^7}$

Sol. a + b + c = 3

हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं

$\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}=3$

अब A.M. $\geq$ G.M.

$\frac{\frac{a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{2}+\frac{c}{2}}{7} \geq \left(\frac{a^2}{4}\frac{b^3}{27}\frac{c^2}{4}\right)^{1/7}$

$\Rightarrow \frac{3}{7} \geq \left(\frac{a^2b^3c^2}{2^4 \times 3^3}\right)^{1/7} \Rightarrow a^2b^3c^2 \leq \frac{3^{10} \cdot 2^4}{7^7}$

Ex.36 यदि a,b,c धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{a^3}{4b}+\frac{b}{8c^2}+\frac{1+c}{2a} \geq \frac{5}{4}$

Sol. $\frac{a^3}{4b}, \frac{b}{8c^2}, \frac{1}{2a}, \frac{c}{4a}, \frac{c}{4a}$

AM $\geq$ GM से

$\frac{\frac{a^3}{4b}+\frac{b}{8c^2}+\frac{1}{2a}+\frac{c}{4a}+\frac{c}{4a}}{5} \geq \left(\frac{a^3}{4b}\cdot\frac{b}{8c^2}\cdot\frac{1}{2a}\cdot\left(\frac{c}{4a}\right)^2\right)^{1/5}$

$\Rightarrow \frac{a^3}{4b}+\frac{b}{8c^2}+\frac{1}{2a}+\frac{c}{2a} \geq \frac{5}{4}$

Ex.37 यदि किसी HP का mवाँ पद n है, और nवाँ पद m के बराबर है, तो सिद्ध कीजिए कि (m + n)वाँ पद $\frac{mn}{m+n}$ है

Sol. AP का mवाँ पद = $\frac{1}{n}$

AP का nवां पद = $\frac{1}{m}$

$A + (m - 1)\ d = \frac{1}{n}$

$A + (n - 1)d = \frac{1}{mn} + (m - m - 1)\ \frac{1}{mn}$

$T_{m+n} = a + (m + n - 1)d = \frac{1}{mn} + (m - m - 1)\ \frac{1}{mn}$

$T_{m+n} = \frac{mn}{m+n}$.

Ex.38 यदि a, b, c HP में हैं, तो $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}$ का मान ज्ञात कीजिए .

Sol. a, b, c HP में हैं, तो

$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ AP में हैं

$S = \frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}+\frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}$

माना $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=d$

$S = \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)}{d} = \frac{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)}{d} = \frac{2d}{d} = 2$

Ex.39 यदि a^2, b^2, c^2 AP में हैं तो दर्शाइए कि b + c,c+ a, a + b HP में हैं

Sol. a^2, b^2, c^2 AP, में हैं

माना b+c,c+a,a+b HP में हैं

फिर $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ AP,में हैं

$\frac{2}{c+a} = \frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}$

2(a + b) (b + c) = 2b + a + c) (a + c)

$2b^2 = a^2 + c^2$

इसलिए a^2, b^2, c^2 AP में हैं

तो अगर a^2, b^2, c^2 AP में हैं तो b + c, c + a, a + b HP में हैं

Ex.40 यदि $\frac{a-x}{px}=\frac{a-y}{qy}=\frac{a-z}{rz}$ और p,q,r AP में हैं तो सिद्ध कीजिए कि x, y, z HP में हैं

Sol. माना = $\frac{a-x}{px}=\frac{a-y}{qy}=\frac{a-z}{rz}$ = k

$p = \frac{a-x}{kx}$, $q = \frac{a-y}{kx}$, $r = \frac{a-z}{kz}$

$2\left(\frac{a-y}{ky}\right)=\frac{a-x}{kx}+\frac{a-z}{kz}$

$2\left(\frac{a}{y}-1\right)=\frac{a}{x}-1+\frac{a}{z}-1 \quad \Rightarrow \frac{2a}{y}=\frac{a}{x}+\frac{a}{z}$

$\frac{2}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{z}$

अतः x, y, z H.P. में हैं

Ex.41 यदि HP में a, b, c, d चार अलग–अलग धनात्मक संख्याएँ हों, तो दिखाएं कि

(a) a + d > b + c (b) ad > bc.

Sol. ∴ a, b, c, d HP में हैं

(a) तब AM > HM

पहले तीन पदों के लिए

∴ $\frac{a+c}{2}>b$ ....(i)

और पिछले तीन पदों से,

$\frac{b+d}{2}>c$ ....(ii)

समीकरण (i) और (ii) से

a + c + b + d > 2b + 2c

⇒ a + d > b + c

(b) फिर से G.M. > H.M.

पहले तीन पदों के लिए, $\sqrt{ac}>b$

⇒ $bd > b^2$ .... (i)

और अंतिम तीन पदों के लिए $\sqrt{bd}>c$

⇒ $bd > c^2$ .... (ii)

समी. (i) और (ii)

$(ac)(bd) > b^2c^2$

⇒ ad > bc.

Ex.42 HP का 7वाँ पद $\frac{1}{10}$ है और 12वाँ पद $\frac{1}{25}$ है, HP का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए

Sol. मान लीजिए a पहला पद है और d संगत AP का सार्व अंतर है

a + 6d = 10

a + 11d = 25

5d = 15

d = 3, a = – 8

T_{20} = a + 19d = – 8 + 19 × 3 = 49

HP का 20 पद = $\frac{1}{49}$

Ex.43 $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{3}{19}$ के बीच 4 HM डालें।

Sol. मान लीजिए 'd' संगत AP का सार्व अंतर है।

इसलिए $d = \frac{\frac{19}{3}-\frac{4}{3}}{5} = 1.$

यदि $\frac{1}{H_1} = \frac{4}{3}+1=\frac{7}{3}$ या $H_1 = \frac{3}{7}$

$\frac{1}{H_2} = \frac{4}{3}+2=\frac{10}{3}$ या $H_2 = \frac{3}{10}$

$\frac{1}{H_3} = \frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}$ या $H_3 = \frac{3}{13}$

$\frac{1}{H_4} = \frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$ या $H_4 = \frac{3}{16}$.

Ex.44 दो संख्याओं का AM,GM से 2 से अधिक है और GM, HM से $\frac{8}{5}$ अधिक है संख्याओं का पता लगाएं।

Sol. मान लीजिए कि संख्याएँ a और b हैं, अब

G^2= AH = (G+ 2) $\left(G-\frac{8}{5}\right)$ ⇒ G = 8 a = 10

अर्थात ab = 64

और a + b = 20

अतः दो संख्याएँ 4 और 16 हैं

Ex.45 यदि n > 0, सिद्ध कीजिए कि $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$

Sol. संबंध A.M ≥ G.M का उपयोग संख्याओं 1, 2, 2^2, 2^3,..........., 2^{n-1} पर करने पर

$\frac{1+2+2^2+.......+2^{n-1}}{n}$ > $(1.2.\ 2^2.\ 2^3.\ ....\ .\ 2n-1)^{1/n}$

समानता नहीं होगी क्योंकि सभी संख्याएँ समान नहीं हैं।

$\Rightarrow \frac{2^n-1}{2-1} > n\left(2^{\frac{(n-1)n}{2}}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow 2^n - 1 > n\ 2^{\frac{(n-1)}{2}}$

$\Rightarrow \quad 2^n > 1 + n\,2^{\frac{(n-1)}{2}}$.

9. समांतर गुणोत्तर श्रेणी (ARITHMETIC GEOMETRIC PROGRESSION (A.G.P.))

यदि किसी श्रेणी का प्रत्येक पद AP और GP के संगत पदों का गुणनफल हो, तो इसे समांतर–गुणोत्तर श्रेणी (AGP) कहा जाता है।

उदाहरण: $a,\ (a + d)\ r,\ (a + 2d)\ r^2$ ......

(AGP) का सामान्य nवां पद है

$T_n = [a + (n-1)\, d]\, r^{n-1}$

AGP के n पदों का योग ज्ञात करने के लिए हम मान लेते हैं कि इसका योग S है, दोनों पक्षों को संगत GP के सार्व अनुपात से गुणा करें। और घटाना इस तरह से है हमें एक GP मिलता है जिसका योग आसानी से प्राप्त किया जा सकता है।

$S_n = a + (a + d)\, r + (a + 2d)\, r^2 + ...[a + (n-1)\, d]\, r^{n-1}$

$rS_n = ar + (a+d)\, r^2 + ...+ [a+(n-1)\, d]\, r^n$

घटाने के बाद हमें मिलता है

$S_n\,(1-r) = a + r.d + r^2 d + ...dr^{n-1} - [a + (n-1)d]\, r^n$

हल करने के बाद

$S_n = \dfrac{a}{1-r} + \dfrac{r.d(1-r^{n-1})}{(1-r)^2} - \dfrac{\left[a+(n-1)d\right]r^n}{1-r}$ और $S_\infty = \dfrac{a}{1-r} + \dfrac{dr}{(1-r)^2}$, [यदि $0 < |r| < 1$]

Note : यह एक मानक सूत्र नहीं है। यह केवल AGP के योग को खोजने की प्रक्रिया को समझने के लिए है, हालांकि अनंत पदों के योग के सूत्र का सीधे उपयोग किया जा सकता है।

10. विविध अनुक्रम (MISCELLANEOUS SEQUENCES)

10.1 प्रकार-1 :

$\sum_{r=1}^{n} r, \sum_{r=1}^{n} r^2, \sum_{r=1}^{n} r^3$ से बनने वाले अनुक्रम

(1) $\sum n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \left(\sum n\right)^2$

DETECTIVE MIND

$\Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{n}(a_r \pm b_r) = \sum_{r=1}^{n} a_r \pm \sum_{r=1}^{n} b_r; \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{n} ka_r = k\sum_{r=1}^{n} a_r \quad \Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{n} k = k\sum_{r=1}^{n} 1 = kn$

Note : (i) प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग

$\Rightarrow \quad \sum_{r=1}^{n}(2r-1) = n^2$

(ii) यदि AP का rवां पद

$T_r = Ar^3 + Br^2 + Cr + D$, तब

AP के n पदों का योग है

$S_n = \sum_{r=1}^{n} T_r = A\sum_{r=1}^{n} r^3 + B\sum_{r=1}^{n} r^2 + C\sum_{r=1}^{n} r + D\sum_{r=1}^{n} 1$

Ex. n पदों की श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए जिसका nवाँ पद 3n + 2 है।

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Sol. $S_n = \sum T_n = \sum (3n+2) = 3\sum n + \sum 2 = \frac{3(n+1)\ n}{2} + 2n = \frac{n}{2}(3n+7)$

10.2 प्रकार –2 (अंतर की विधि का उपयोग करना):

यदि T_1, T_2, T_3,.........अनुक्रम के पद हैं तो पद

$T_2 - T_1, T_3 - T_2, T_4 - T_3$ ....

कभी AP में हैं और कभी GP में हैं ऐसी श्रेणी के लिए हम पहले उनके nवें पद की गणना करते हैं और फिर सिग्मा संकेतन का उपयोग करके n पदों के योग की गणना करते हैं।

Ex. श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए।

6 + 13 + 22 + 33 + ... n पद

Sol. मान लीजिए $S = 6 + 13 + 22 + 33 ...... + T_n$

$$\underline{S = 6 + 13 + 22 + ... + T_{n-1} + T_n}$$

$$0 = 6 + 7 + 9 + 11 + ... - T_n$$

$$0 = 6 + 7 + 9 + 11 + ...$$

या $T_n = 6 + (7 + 9 + 11 + ...)$

$$= 6 + \left[\frac{n-1}{2}\left[2\times7+(n-2)2\right]\right] = 6 + \left[\frac{(n-1)}{2}(14+2n-4)\right]$$

$$= 6 + (n-1)(n+5) = 6 + n^2 + 4n - 5$$

$$T_n = n^2 + 4n + 1$$

$$\therefore \quad S_n = \sum_{n=1}^{n} T_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4(n)(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3}+4\right] + n \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+13}{3}\right] + n \Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+13)}{6} + n$$

10.3 प्रकार – 3 (दो के अंतर के रूप में nवां पद विभाजित करना)

यहां एक श्रेणी है जिसमें प्रत्येक पद AP में r कारकों के गुणन के व्युत्क्रम रूप से बना है, कई पदों के प्रथम गुणखण्ड A.P मे होते है।

Ex. श्रेणी $\frac{3}{1\cdot2\cdot4} + \frac{4}{2\cdot3\cdot5} + \frac{5}{3\cdot4\cdot6} + ...$ के n पदों का तथा अनंत पदों का योग ज्ञात कीजिए

Sol. $\frac{3}{1\cdot2\cdot4} + \frac{4}{2\cdot3\cdot5} + \frac{5}{3\cdot4\cdot6} + ...\ \frac{(n+2)}{n(n+1)(n+3)}$

$$= \frac{3^2}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{4^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + ... + \frac{(n+2)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$T_n = \frac{n^2+4n+4}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+4n+3}{n(n+1)(n+2)(n+3)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$T_n = \frac{1}{n(n+2)} + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

अब, $S_1 = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+2)}$, $S_2 = \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{2\cdot4} + \frac{1}{3\cdot5} + ...\frac{1}{n(n+2)}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{3-1}{1\cdot3} + \frac{4-2}{2\cdot4} + \frac{5-3}{3\cdot5} + ... + \frac{(n+2)-n}{n(n+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right]$$

$= \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right]$

$S_2 = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$

$S = S_1 + S_2.$

10.4 प्रकार–4:

यहां एक श्रेणी है जिसमें प्रत्येक पद AP में r गुणनखण्ड से बना है, कई पदो के पहले गुणनखण्ड A.P में होते है।

Ex. 1.2 . 3 . 4 + 2 . 3 . 4 . 5 + 3 . 4 . 5 . 6 + ... n पदों तक

Sol. $T_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - \frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)(n+3)}{5}$

$T_1 = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{5} - 0$

$T_2 = \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{5} - \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{5}$

$T_3 = \frac{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}{5} - \frac{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{5}$

....

....

$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - \frac{(n-1)(n)(n+1)(n+2)(n+3)}{5}$

$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}$

SOLVED EXAMPLES

Ex.46 (a) यदि 9 + 99 + 999 + ... 49 पदों तक = $10\frac{(10^{\lambda}-1)}{\mu} - 49$ जहाँ $\lambda, \mu \in N$ तो $\lambda + \mu$ का मान ज्ञात कीजिए

(b) 0.9 + 0.99 + 0.999 + ... 51 पदों तक = $51 - \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{10^q}\right)$ जहाँ $p, q \in N$ तो $p + q$ का मान ज्ञात कीजिए।

Sol. (a) S = 9 + 99 + 999 + ... + 49 पदों तक

$S = 10 - 1 + 10^2 - 1 + 10^3 - 1 + ... + 10^{49} - 1$

$= (10 + 10^2 + 10^3 + ... 10^{49}) - 49$

$S = 10\cdot\left(\frac{10^{49}-1}{9}\right) - 49$

$\lambda + \mu = 49 + 9 = 58$

(b) S = 0.9 + 0.99 + 0.999 + ...51 पदों तक

$= \frac{9}{10}+\frac{99}{100}+\frac{999}{1000}+.....$ 51 पदों तक

$= 1-\frac{1}{10}+1-\frac{1}{10^2}+1-\frac{1}{10^3}+......+1-\frac{1}{10^{51}}$

$= 51-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+......+\frac{1}{10^{51}}\right)$

$= 51-\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^{51}}\right)}{1-\frac{1}{10}} = 51-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^{51}}\right)$

$\Rightarrow$ p + q = 60

Ex.47 श्रेणी $\frac{3}{19}+\frac{33}{19^2}+\frac{333}{19^3}+\frac{3333}{19^4}+......\infty$ का योग ज्ञात कीजिए

Sol. $S = \frac{3}{19}+\frac{33}{19^2}+\frac{333}{19^3}+\frac{3333}{19^4}+......\infty$

या $S = \frac{3}{9}\left[\frac{9}{19}+\frac{99}{19^2}+\frac{999}{19^3}+......\infty\right]$

$\Rightarrow \frac{3}{9}\left[\frac{10-1}{19}+\frac{10^2-1}{19^2}+\frac{10^3-1}{19^3}......\infty\right]$

$$\Rightarrow \frac{3}{9}\left[\left(\left(\frac{10}{19}\right)+\left(\frac{10}{19}\right)^2+\left(\frac{10}{19}\right)^3+......\infty\right)-\left(\frac{1}{19}+\frac{1}{19^2}+......\infty\right)\right]$$

$$S = \frac{3}{9}\left[\frac{10/19}{1-10/19}-\left(\frac{1/19}{1-1/19}\right)\right]$$

Ex. 48 यदि श्रेणी $3 + (3 + d)\frac{1}{4} + (3 + 2d)\frac{1}{4^2} + ...\infty$ के अनंत पदो का योग $\frac{44}{9}$ है तब d खोजें।

Sol. $S = 3+(3+d)\frac{1}{4}+(3+2d)\frac{1}{4^2}+......\infty$ ... (1)

$\Rightarrow \frac{1}{4}S=(3)\frac{1}{4}+(3+d)\frac{1}{4^2}+......\infty$ ... (2)

(1) से (2) घटाने पर हमें प्राप्त होता है

$\frac{3}{4}S=3+(d)\frac{1}{4}+(d)\frac{1}{4^2}+......\infty$

$= 3+\frac{\frac{d}{4}}{1-\frac{1}{4}} = 3+\frac{d}{3} \Rightarrow S = 4+\frac{4d}{9}$

दिया गया,

$4 + \frac{4d}{9} = \frac{44}{9}$

$\Rightarrow \frac{4d}{9}=\frac{8}{9} \Rightarrow d = 2$

Ex.49 यदि $|x| < 1$ फिर योग की गणना करें

(a) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... \infty$

(b) $1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ... \infty$

Sol. (a) $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... \infty$

$xS = x + 2x^2 + 3x^2 + ... \infty$

$S(1 - x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

$S(1 - x) = \frac{1}{1-x}$

$S = \frac{1}{(1-x)^2}$

(b) $S = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + ... \infty$

$xS = \quad x + 3x^2 + 6x^3 + ... \infty$

$(1 - x)S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ... \infty$

या समीकरण (1) द्वारा

$(1 - x)S = \frac{1}{(1-x)^2}$

$S = \frac{1}{(1-x)^3}$

Ex.50 $(31)^2 + (32)^2 + (33)^2 + ... + (50)^2$ योग की गणना करें।

Sol. $S = (31^2) + (32^2) + (33^2) + ... + (r + 30)^2 + ... (50)^2$

$S = \sum_{n=1}^{20}(n+30)^2 \Rightarrow \sum_{r=1}^{20} r^2+60r+900$

$\Rightarrow \frac{20\times21\times41}{6}+\frac{60\times20\times21}{2}+900\times20 \Rightarrow 33470$

Ex.51 श्रेणी $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + ...$ के n पदों का योग ज्ञात कीजिए

Sol $T_n = n(n + 1)(n + 2)$

मानो S_n दी गई श्रेणी के n पदों के योग को निरूपित करता है। तो,

$S_n = \sum_{k=1}^{n}T_k = \sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)$

$= \left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)+3\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)+2\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)$

$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{2n(n+1)}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{n(n+1)}{2}+(2n+1)+2\right\}$

$= \frac{n(n+1)}{2}\{n^2+n+4n+2+4\} = \frac{n(n+1)}{2}(n^2+5n+6)$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Ex.52 श्रेणी $1 + 5\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right) + 9\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^2 + 13\left(\frac{4n+1}{4n-3}\right)^3 +$ .... के n पदों का योग है।

Sol. माना $x = \frac{4n+1}{4n-3}$, तब

$1 - x = \frac{-4}{4n-3}, \frac{1}{1-x} = -\frac{(4n-3)}{4}$

$\frac{x}{1-x} = -\frac{(4n+1)}{4}$

$S = 1 + 5x + 9x^2 + ... + (4n - 3)x^{n-1}$

$Sx = x + 5x^2 + ... (4n - 3)x^n$

$S - Sx = 1 + 4x + 4x^2 + ... + 4x^{n-1} - (4n - 3)x^n.$

$S(1 - x) = 1 + \frac{4x}{1-x}[1 - x^{n-1}] - (4n - 3)x^n$

$S = \frac{1}{1-x}\left[1+\frac{4x}{1-x}-\frac{4x^n}{1-x}-(4n-3)x^n\right]$

$= -\frac{(4n-3)}{4}[1-(4n+1)+(4n-3)x^n-(4n-3)x^n]$

$= n(4n - 3).$

Ex.53 श्रेणी 5, 7, 13, 31, 85 + ... के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

Sol. पदों का क्रमागत अंतर सार्व अनुपात 3 के साथ GP में है।

$T_n = a(3)^{n-1} + b \Rightarrow a + b = 5$

$3a + b = 7 \quad \Rightarrow \quad a = 1, b = 4$

$T_n = 3^{n-1} + 4$

$S_n = \sum T_n = \sum (3^{n-1} + 4) = (1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1}) + 4n$

$= \frac{1}{2}\ [3^n + 8n - 1]$

Ex. 54 श्रेणी के n–पदों का योग ज्ञात कीजिए 2.5 + 5.8 + 8.11 + ...

Sol. $T_r = (3r - 1)(3r + 2) = 9r^2 + 3r - 2$

$S_n = \sum_{r=1}^{n} T_r = 9\sum_{r=1}^{r^2} + 3\sum_{r=1}^{n} r - \sum_{r=1}^{n} 2$

$= 9\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + 3\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - 2n =$

$3n(n + 1)^2 - 2n$

Ex.55 श्रेणी $\frac{1}{1.4.7} + \frac{1}{4.7.10} + \frac{1}{7.10.13} + ...$ के n पदों का योग

Sol. $T_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)(3n+4)}$

$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$

$= \frac{1}{6}$

$\left[\left(\frac{1}{1.4} - \frac{1}{4.7}\right) + \left(\frac{1}{4.7} - \frac{1}{7.10}\right) + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$

$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}\right]$

Ex.56 श्रेणी 1 + 5 + 19 + 49 + 101 + 181 + 295 + ...के n पदों तथा सामान्य पद का योग ज्ञात कीजिए

Sol. क्रमागत पद के बीच अंतर का क्रम 4, 14, 30, 52, 80.....

दूसरे क्रम के अंतर का क्रम 10, 16, 22, 28, ... स्पष्ट रूप से यह एक A.P. है

तो माना n^{th} पद

$T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$

$a + b + c + d = 1$ ....(i)

$8a + 4b + 2c + d = 5$ ....(ii)

$27a + 9b + 3c + d = 19$ ....(iii)

$64a + 16b + 4c + d = 49$ ....(iv)

(i), (ii), (iii) और (iv) से

$a = 1, b = -1, c = 0, d = 1 \quad \Rightarrow \quad T_n = n^3 - n^2 + 1$

$s_n = \sum (n^3 - n^2 + 1) = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 -$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12} + n$