Chapter 01

मूलभूत गणित
(Basic Mathematics)

CONTENT

1. बीजगणित
2. त्रिकोणमिति
3. निर्देषांक
4. अवकलन
5. समाकलन
6. ग्राफ
7. सदिश

1. बीजगणित

1.1 द्विघात समीकरण (Quadratic Equation)

द्वितीय कोटि की बीजगणित समीकरण (चर की उच्चतम घात 2 हो) द्विघात समीकरण कहलाती है। द्विघात समीकरण का व्यापक रूप है,

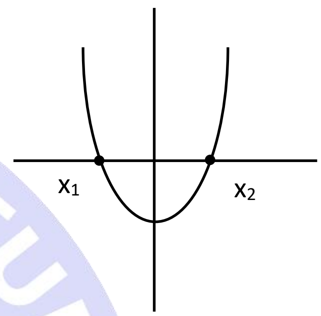
समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$....(i) (a 0)

उपरोक्त समीकरण का व्यापक हल

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ and}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



यहां x_1 तथा x_2 समीकरण (i) के मूल कहलाते हैं.

मूलों का योग $= x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$

तथा मूलों का गुणनफल $= x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Example 1: समीकरण $2x^2 - x - 3 = 0$ के मूल ज्ञात करो।

(1) 3/2, –1 (2) 1, 3/2 (3) 2, 3 (4) –3/2, –1

Solution: द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, के मानक रूप से समीकरण की तुलना करने पर $a=2, b=-1, c=-3$.

अब $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} \Rightarrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{-4}{4} \Rightarrow x_2 = -1$$

Example 2: समीकरण $3x^2 - 5x - 12 = 0$ के मूलो का योग एवं गुणनफल ज्ञात कीजिऐ।

(1) 5/3, –4 (2) –5/3, 4 (3) –4, 5/3 (4) –4, –5/3

Solution: $\alpha + \beta = -b/a = 5/3 \Rightarrow$ (α, β समीकरण के मूल है)

$\Rightarrow \alpha\beta = c/a = -4$

1.2 द्विपद सन्निकटन

यदि x बहुत छोटा है तो पद में x की उच्चतम घातों को नगण्य मान सकते हैं अतः $(1+x)^n = 1 + nx$

Example 3: पृथ्वी की सतह के h ऊँचाई पर गुरूत्वीय त्वरण (g) का मान $g' = g\left(\frac{R}{R+h}\right)^2$ है। बहुत कम ऊँचाई के लिए g' का मान क्या होता है ?

Solution: $g' = g\left\{1 + \frac{h}{R_e}\right\}^{-2} \Rightarrow g' = g\left\{1 - \frac{2h}{R_e}\right\}$

Example 4: $\sqrt{0.99}$ के मान की गणना कीजिऐ।

(1) 0.995 (2) 1 (3) 0.990 (4) 1.05

Solution: $\sqrt{0.99} \Rightarrow \left\{1 - \frac{1}{100}\right\}^{1/2} \Rightarrow \left\{1 - \frac{1}{200}\right\} = 0.995$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

1.3 लघुगणक सूत्र:

- $\log m^n = n \log m$
- $\log mn = \log m + \log n$
- $\log\left(\frac{m}{n}\right) = \log m - \log n$
- $\log_a {}^{(a)} = 1$
- $\ell n\ m = \log_e m$

SPOT LIGHT

- $\log_e m = 2.303 \log_{10}(m)$; $\ln(1) = 0$

Example 5: $\log_{10}12$ की गणना कीजिऐ।

(1) 1 (2) 1.05 (3) 1.079 (4) 1.085

Solution: $\log_{10}12 = \log_{10}(4 \times 3) = \log_{10}4 + \log_{10}3 = \log_{10}2^2 + \log_{10}3 = 2\log_{10}2 + \log_{10}3$

$= 2 \times 0.301 + 0.477 = 1.079$

1.4 अनुपात के अनुप्रयोग

- यदि $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ $\Rightarrow \frac{p+q}{p-q} = \frac{a+b}{a-b}$
- यदि $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ $\Rightarrow \frac{p+q}{q} = \frac{a+b}{b}$
- यदि $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$ $\Rightarrow \frac{p-q}{q} = \frac{a-b}{b}$

Example 6: $\frac{a+b}{a-b}$ की गणना कीजिऐ। यदि $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$ है ?

(1) $\frac{7}{3}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{2}{3}$

Solution: $\frac{a}{b} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{5+2}{5-2} = \frac{7}{3}$

1.5 श्रेणी:

श्रेणी

	समान्तर श्रेणी (AP)	गुणोत्तर श्रेणी (GP)	हरात्मक श्रेणी (HP)
व्यापक रूप	a, a+d, a+2d, ...a+(n–1)d	$a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$	$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, ...\frac{1}{a+(n-1)d}$
n^{th} पद	$a_n = a+(n-1)d$	$a_n = ar^{n-1}$	$a_n = \frac{1}{a+(n-1)d}$
n पदो का योग	$S_n = \frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$ $\Rightarrow \frac{n}{2}[1^{st}\text{ term} + n^{th}\text{ term}]$	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $S_\infty = \frac{1}{1-r}$ ∞ पदो का योग	
माध्य	$A.M. = \frac{a+b}{2}$	$G.M. = (a.b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$	$H.M. = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

SPOT LIGHT

➢ **समान्तर श्रेणी ≥ गुणोत्तर श्रेणी**

Example 7: पहली n प्राकृत संख्याओ का योग ज्ञात कीजिऐ।

(1) $\left[\frac{n(n+2)}{2}\right]$ (2) $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$ (3) $\left[\frac{n(n+1)}{1}\right]$ (4) $\left[\frac{n(n+2)}{1}\right]$

Solution: माना योग S_n है, तो :

$S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n;$

$$S_n = \frac{n}{2}[1+n] = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Example 8: 3, 6 के समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य की गणना कीजिऐ।

(1) A. M. = 4; G.M. = $3\sqrt{2}$ H.M. = 3.5 (2) A. M. = $3\sqrt{2}$; G.M. = 4.5 H.M. = 4

(3) A. M. = 4.5; G.M. = $3\sqrt{2}$ H.M. = 4 (4) A. M. = $3\sqrt{2}$; G.M. = 5 H.M. = 4

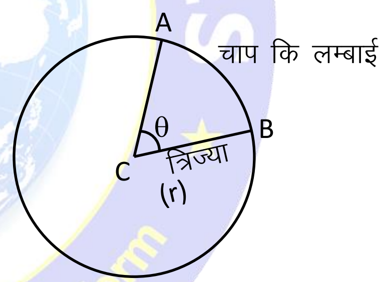
Solution: A.M. = $\frac{a+b}{2} = \frac{3+6}{2} = 4.5$

G.M. = $\sqrt{3\times6} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times2} = 3\sqrt{2}$

H.M. = $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2\times3\times6}{9} = 4$

2. त्रिकोणमिति (Trigonometry)

2.1 डिग्री व रेड़ियन :



$\theta = \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{त्रिज्या}} \Rightarrow \quad \theta = \frac{AB}{r}$

यदि r = 1 हो तो θ = AB (लम्बाई का चाप)

कोण का मात्रक रेडियन या डिग्री होता हैं।

कोण रूपान्तरण सूत्र

π रेडियन = 180°

कोण रूपान्तरण सूत्र

डिग्री से रेडियन में

1 डिग्री = $\frac{\pi}{180} \approx 0.02\text{rad}$

➢ $\frac{\pi}{180}$ का गुणज

रेडियन से डिग्री में

1 रेडियन = $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$ degree

➢ $\frac{180°}{\pi}$ का गुणज

कुछ मानक मान

डिग्री	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	360°
रेडियन	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	2π

Example 9: (i) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन को डिग्री में परिवर्तित करो। (ii) 30° डिग्री को रेडियन में परिवर्तित करो।

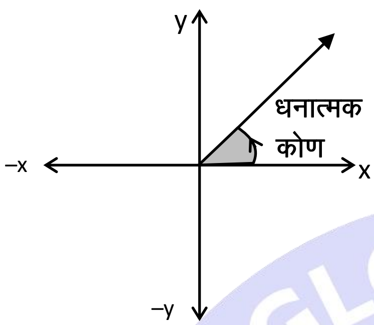
KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Solution: (i) $\frac{\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 30^\circ$ (ii) $30^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{6}$ rad

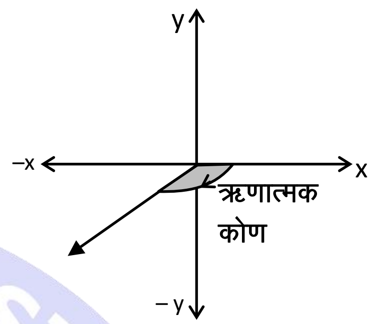
2.2 धनात्मक तथा ऋणात्मक कोणो का मापन

धनात्मक कोण: - कोण को वामार्वत दिशा मे मापे जाने पर हमेशा धनात्मक होता हैं।

ऋणात्मक कोण: - कोण को दक्षिणावर्त दिशा में मापे जाने पर हमेशा ऋणात्मक होता हैं।

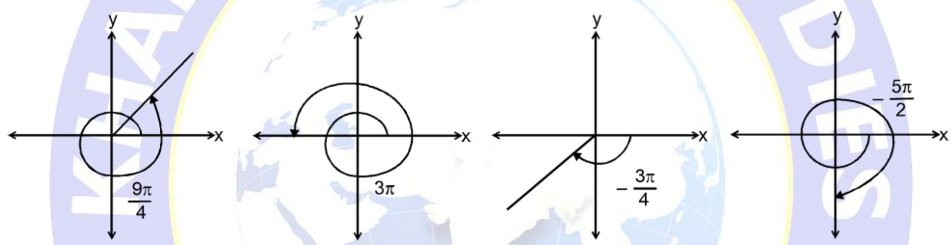


धनात्मक कोण घूर्णक



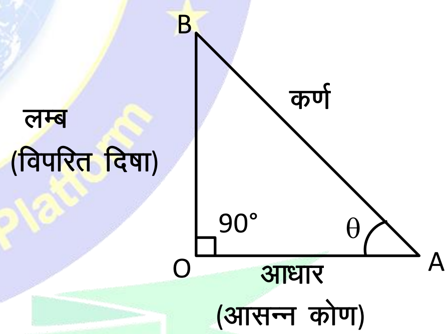
ऋणात्मक कोण घूर्णक

e.g.: -



2.3 त्रिकोणमितीय फलन :

Sinθ	Cosθ	tanθ
P	B	P
H	H	B
Cosecθ	secθ	cotθ



The trigonometric ratio

$\sin\theta = \frac{\text{Perpendicular}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{OB}{AB} \quad \Rightarrow \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta = \frac{\text{Base}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{OA}{AB} \quad \Rightarrow \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \frac{\text{Perpandicular}}{\text{Base}} = \frac{OB}{OA} \quad \Rightarrow \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

➢ **कुछ मानक कोणो के लिए sin θ, cos θ तथा tan θ के मान**

डिग्री	0°	30°	37°	45°	53°	60°	90°
रेडियन	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{37\pi}{180}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{53\pi}{180}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	0

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	∞

➢ **90° से अधिक कोणों के लिए त्रिकोणमीतीय अनुपात**

Step 1 $\rightarrow$ उस चतुर्थांष कि पहचान करे जिसमे कोण स्थित हैं।

↓

Step 2 $\rightarrow$ +ve या –ve चिन्हो को ASTC नियम द्वारा तय करना

↓

Step 3 $\rightarrow$ (i) यदि कोण = $(n\pi \pm \theta)$ जहाँ n एक पूर्णांक है, $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2})$

तो $(n\pi \pm \theta)$ का त्रिकोणमीतीय फलन = (चिन्ह) θ का कुछ त्रिकोणमीतीय फलन

(ii) यदि कोण = $\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right]$

= (चिन्ह) θ के पूरक कोणों के त्रिकोणमीतीय फलन

($\because$ चिन्ह को ASTC नियम द्वारा चयन करेगे) $\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} \pm \theta\right]$ का त्रिकोणमीतीय फलन

$\Rightarrow$ **त्रिकोणमीतीय पूरक कोणो के फलन**

$\sin\theta \rightleftharpoons \cos\theta$

$\tan\theta \rightleftharpoons \cot\theta$

$\sec\theta \rightleftharpoons \text{cosec}\,\theta$

➢ **कुछ सामान्य उदाहरण (90° and 270° के लिए):-**

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \quad \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

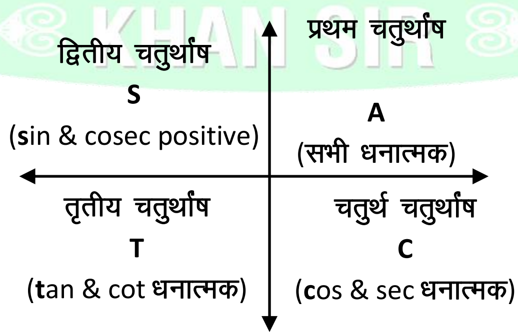
(ii) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \Rightarrow \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

(iii) $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cosec}\,\theta \Rightarrow \text{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$

(iv) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta \quad \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

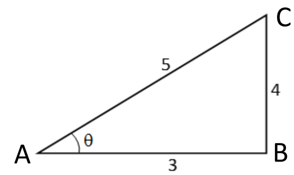
SPOT LIGHT

ASTC नियम



KHAN SIR
Most Trusted Learning Platform

Example 10: प्रदर्शित चित्र में सभी छः त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करो।



Solution: $\sin\theta = \frac{4}{5}$; $\cos\theta = \frac{3}{5}$;

$\tan\theta = \frac{4}{3}$; $\text{cosec}\ \theta = \frac{5}{4}$;

$\sec\theta = \frac{5}{3}$; $\cot\theta = \frac{3}{4}$

Example 11: निम्न का मान ज्ञात कीजिए:

(i) sin30° + cos60° (ii) sin 0° – cos 0°
(iii) tan 45°–tan 37° (iv) sin 390°
(v) cos 405° (vi) tan 420° (vii) sin 150° (viii) cos 120°
(ix) tan 135° (x) sin (330°) (xi) cos 300° (xii) sin (–30°)
(xiii) cos (–60°) (xiv) tan (–45°) (xv) sin (–150°)

Solution: (i) $\sin 30° + \cos 60° = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (ii) $\sin 0° - \cos 0° = 0 - 1 = -1$

(iii) $\tan 45° - \tan 37° = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ (iv) $\sin 390° = \sin(360° + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

(v) $\cos 405° = \cos(360° + 45°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(vi) $\tan 420° = \tan(360° + 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

(vii) $\sin 150° = \sin(90° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$ or $\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

(viii) $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

(ix) $\tan 135° = \tan(180° - 45°) = -\tan 45° = -1$

(x) $\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

(xi) $\cos 300° = \cos(360° - 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

(xii) $\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$ (xiii) $\cos(-60°) = +\cos 60° = +\frac{1}{2}$

(xiv) $\tan(-45°) = -\tan 45° = -1$

(xv) $\sin(-150°) = -\sin(150°) = -\sin(180° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform

2.4 त्रिकोणमितीय सूत्र

त्रिकोणमीतीय सूत्र

पहचान
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

जोडना/घटाने वाले सूत्र
- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

जहां A = B
- $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
  $= 1 - 2\sin^2\theta$
  $= 2\cos^2\theta - 1$

अधिकतम व न्यूनतम मान
- $-1 \le \sin\theta \le 1$
- $-1 \le \cos\theta \le 1$
- $-\sqrt{a^2 + b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2 + b^2}$

DETECTIVE MIND

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\sin(\theta+\alpha)$$

जहाँ $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

SPOT LIGHT

➢ **लघु कोण सन्निकट**

यदि θ छोटा — $\sin\theta \approx \theta$ (θ in radian)

$\tan\theta \approx \theta$ (θ in radian) — $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$

$\cos\theta \approx 1$

Example 12: निम्न के सन्निकट मान ज्ञात करो

(i) sin 1°

(1) 0.02 (2) 0.04 (3) 0.05 (4) 0.03

(ii) tan 2°

(1) 0.04 (2) 0.03 (3) 0.05 (4) 0.01

(iii) cos 1°

(1) 0.7 (2) 1.02 (3) 1.05 (4) 1

Solution: (i) $\sin 1° = \sin\left(1°\times\frac{\pi}{180°}\right) = \sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} = 0.02$

(ii) $\tan 2° = \tan\left(2°\times\frac{\pi}{180°}\right) = \tan\frac{\pi}{90} \approx \frac{\pi}{90} = 0.04$

(iii) $\cos 1° = \cos\left(1°\times\frac{\pi}{180°}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{180°}\right) = 1$

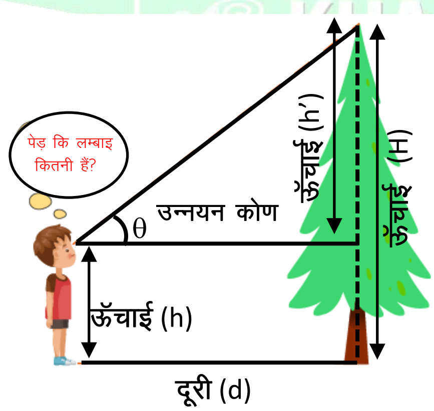
Example 13: एक गेंद क्षैतिज से θ कोण पर u वेग से प्रक्षेपित की जाती है। प्रक्षेपण की परास R निम्न है : $\frac{u^2\sin 2\theta}{g}$ कोण θ के किस मान के लिये दिये गये प्रक्षेप्य के वेग के लिये परास अधिकतम होगी? (यहां g = नियतांक)

(1) $\frac{\pi}{2}$ rad (2) $\frac{\pi}{4}$ rad (3) $\frac{\pi}{3}$ rad (4) $\frac{\pi}{6}$ rad

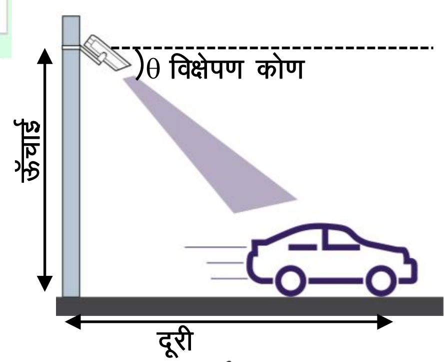
Solution: $\sin 2\theta \le 1$ इसलिये परास अधिकतम होगी यदि $\sin 2\theta = 1$. अत: $2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ rad.

➢ **त्रिकोणमीती के अनुप्रयोग: -**

(i) वस्तु कि ऊँचाई **(ii) केमरे द्वारा तय क्षेत्रफल**

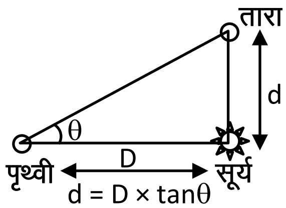


ऊँचाई (H) = h + दूरी (d) × tanθ (h')



$$\text{दूरी} = \frac{\text{ऊंचाई}}{\tan\theta}$$

(iii) अधिकतम दूरी का मापन

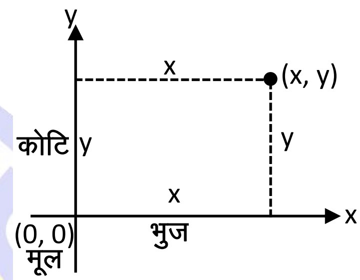


3. निर्देशांक ज्यामितीय (Coordinate Geometry)

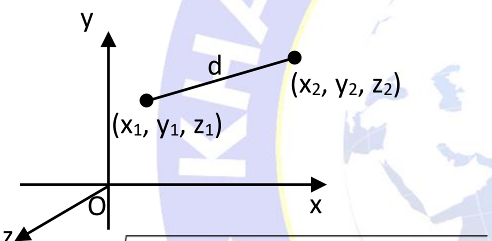
समष्टि में एक बिन्दु की स्थिति का पता लगाने के लिये हम दांये हाथ के आयताकार निर्देशी अक्ष निकाय का उपयोग करते हैं। यह निकाय (i) मूल बिन्दु (ii) अक्ष अथवा अक्षों से बनता है।

3.1 xy तल में एक बिन्दु की स्थिति:

एक बिन्दु की स्थिति x तथा y-अक्ष (अथवा समान्तर) के अनुदिश इसकी मूल बिन्दु से दूरी होती है।एक बिन्दु की स्थिति x तथा y-अक्ष (अथवा समान्तर) के अनुदिश इसकी मूल बिन्दु से दूरी होती है।

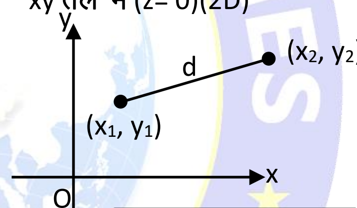


3.2 दूरी सूत्र



दूरी = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

xy तल में (z= 0)(2D)



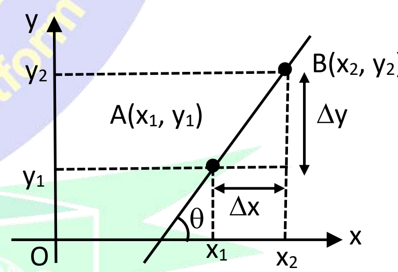
दूरी = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3.3 रेखा का ढाल

दो बिन्दुओं $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा का ढाल m द्वारा दर्शाया जाता है

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \tan\theta$$

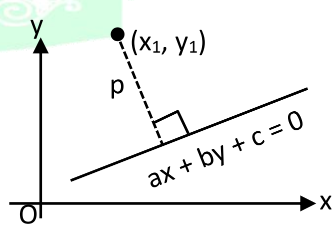
यहां θ रेखा द्वारा धनात्मक x-अक्ष के साथ बनाया गया कोण है। रेखा का ढाल झुकाव के माप से सम्बन्धित है।



3.4 एक बिन्दु तथा एक रेखा के मध्य लम्बवत् दूरी:

एक बिन्दु (x_1, y_1) से रेखा $ax + by + c = 0$ की लम्बवत् दूरी निम्न है।

$$p = \frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



Example: 14 बिन्दु (2, 14) के लिये भुज तथा कोटि ज्ञात करो। y-अक्ष तथा x-अक्ष से दूरी भी ज्ञात करो।

Solution: भुज = x-निर्देशांक = 2
= y-अक्ष से दूरी
कोटि = y-निर्देशांक = 14
= x-अक्ष से दूरी

Example: 15 यदि बिन्दुओं (–9 cm, a cm) तथा (3 cm, 3cm) के मध्य दूरी 13 cm है तो a का मान ज्ञात करो।

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

(1) – 2 cm अथवा 6 cm (2) – 2 cm अथवा 8 cm
(2) – 3 cm अथवा 8 cm (4) – 4 cm अथवा 6 cm

Solution: दूरी सूत्र के प्रयोग द्वारा

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\Rightarrow 13 = \sqrt{[3-(-9)]^2 + [3-a]^2}$

$\Rightarrow 13^2 = 12^2 + (3-a)^2 \Rightarrow (3-a)^2 = 13^2 - 12^2 = 5^2$

$\Rightarrow (3-a) = \pm 5 \Rightarrow a = -2$ cm अथवा 8 cm

Example: 16 एक कुत्ता एक बिल्ली पकड़ना चाहता है। कुत्ता पथ जिसका समीकरण $y - x = 0$ है, का अनुसरण करता है, जबकि बिल्ली पथ जिसका समीकरण $x^2 + y^2 = 8$ है, का अनुसरण करती है। बिल्ली को पकड़ने के सम्भव बिन्दुओं के निर्देशांक होंगे।

(1) (2, –2) (2) (2, 2) (3) (–2, 2) (4) (–2, –2)

Solution: माना (x_1, y_1) बिन्दु पर पकड़ता है तो, $y_1 - x_1 = 0$ तथा $x_1^2 + y_1^2 = 8$

अतः $2x_1^2 = 8 \Rightarrow x_1^2 = 4 \Rightarrow x_1 = \pm 2$;

अतः सम्भव बिन्दु (2, 2) तथा (–2, –2) है।

Example: 17 एक कार जिसका वेग 5 s में 10 m/s से 20 m/s परिवर्तित होता है। v-t आरेख खींचो तथा v का मान समय के पदों में लिखो।

Solution: ढ़ाल = $\frac{20-10}{5-0}$ = 2 m

रेखा v अक्ष पर काटती है = c = 10

अतः समीकरण v = 2t + 10

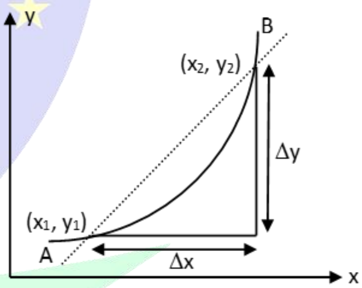
4. अवकलन (DIFFERENTIAL CALCULUS):

हम यहां सतत् रूप से परिवर्तनशील फलनों के मध्य सम्बन्धों का अध्ययन करेंगे।

अवकलन का उद्देश्य किसी राशि में परिवर्तन की मात्रा (अर्थात् बढ़ना या घटना) का अध्ययन करना है, जब दूसरी राशि (जिस पर प्रथम राशि निर्भर करती है) स्वतंत्र रूप से परिवर्तित होती है।

4.1 औसत परिवर्तन दर :

माना फलन $y = f(x)$ चित्रानुसार आलेखित है। अन्तराल $[x_1, x_2]$ में x के सापेक्ष y में औसत परिवर्तन दर

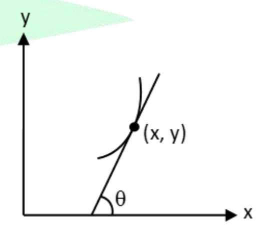


औसत परिवर्तन दर = $\frac{\text{y में परिवर्तन}}{\text{x में परिवर्तन}}$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ = जीवा AB का ढाल

4.2 तात्क्षणिक परिवर्तन दर :

x के किसी विशिष्ट मान पर x के सापेक्ष y में परिवर्तन की दर, तात्क्षणिक परिवर्तन दर कहलाती है। इसे (x,y) पर खींची गई स्पर्शज्या के ढाल द्वारा मापा जा सकता है। साथ ही बीजगणितीय रूप में इसे फलन $y = f(x)$ का प्रथम अवकलज कहते हैं। तात्क्षणिक परिवर्तन की दर = $\frac{dy}{dx}$ = स्पर्श रेखा का ढाल = $\tan\theta$



4.3 सामान्यता प्रयुक्त किये जाने वाले कुछ फलनों के अवकलज :

y = नियत	$\frac{dy}{dx} = 0$
$y = cx^n$ (घातांक नियम)	$\frac{dy}{dx} = cnx^{n-1}$
$y = e^x$ (चरघातांकी फलन)	$\frac{dy}{dx} = e^x$

y = ln x (लघुगुणक फलन)	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$
y = sinx	$\frac{dy}{dx}=\cos x$
y = cosx	$\frac{dy}{dx}=-\sin x$
y = tan x	$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$

4.4 अवकलन के नियम

- **योग नियम**

यदि u व v,x के अवकलन फलन हो, तो प्रत्येक बिन्दु पर उनके योग कि अवकलनीयता u + v होगी।

$$\frac{d}{dx}(u\pm v)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}$$

योग नियम का विस्तार से अधिक कार्यो के योग पर भी होता हैं, यदि u_1, u_2,.........u_n अवकलनीय है $\forall x$, तो

$$\frac{d}{dx}(u_1+u_2+.....+u_n) = \frac{du_1}{dx}+\frac{du_2}{dx}+.......+\frac{du_n}{dx}$$

- **गुणनफल नियम**

यदि u व v, x के अवकलनीय है, तो uv के गुणनफल का व्युत्पन्न है

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx} \quad \text{या} \quad \frac{d}{dx}(I.II)=I\frac{d}{dx}(II)+II\frac{d}{dx}(I)$$

SPOT LIGHT

दो फलनो का योग उनके अवकलन के योग के बराबर है, लेकिन दो फलनों का गुणनफल अवकलन के फलनो के गुणनफल के बराबर नहीं होगा।

उदा. $\frac{d}{dx}(x.x) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, while $\frac{d}{dx}(x).\frac{d}{dx}(x) = 1.1 = 1$.

- **भागफल नियम**

यदि u व v, x के अवकलन है, और $v(x)\neq 0$ तो भाग u/v, x कि अवकलनीय हैं

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$\Rightarrow$ दो फलनो के भागफल का अवकलन उनके अवकलन का भागफल नही होता है

- **फलन का फलन : श्रृंखला नियम**

माना f, x का फलन है, जो t कि ओर मुड़ा हैं t के सापेक्ष f का प्रथम अवकलन $\frac{df}{dx}$ व $\frac{dx}{dt}$ के गुणनफल के बराबर होता हैं।

$$\therefore \frac{df}{dt}=\frac{df}{dx}\times\frac{dx}{dt}$$

- **घातांक श्रृखला नियम**

यदि u (x) फलन, जहाँ n एक प्राकृत संख्या हैं तो u^n के अवकलन व $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$, $\forall n \in R$

DETECTIVE MIND

➢ **रेडियन बनाम डिग्री के अवकलन**

$$\frac{d}{dx}\sin(x°) = \frac{d}{dx}\sin\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos\left(\frac{\pi x}{180}\right) = \frac{\pi}{180}\cos(x°)$$

Example: 18 निम्न फलनों के अवकलज ज्ञात करो

(i) $y = 2x^3$ (ii) $y = \frac{4}{x}$ (iii) $y = 3e^x$

(iv) $y = 6 \ln x$ (v) $y = \log_{10} x$ (vi) $y = 5 \sin x$

Solution: (i) $y = 2x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2[3x^{3-1}] = 6x^2$ (ii) $y = \frac{4}{x} = 4x^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4[(-1)x^{-1-1}] = -\frac{4}{x^2}$

(iii) $y = 3e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3e^x$ (iv) $y = 6\ln x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{6}{x}$

(v) $y = \log_{10} x \Rightarrow y = \frac{1}{2.303}\ln x \Rightarrow = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2.303x}$ (vi) $y = 5\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5\cos x$

Example: 19 निम्न के लिए y का x के सापेक्ष प्रथम अवकलज ज्ञात करो।

(i) $y = x^2 \sin x$, (ii) $y = 4(e^x)\cos x$

Solution: (i) $\frac{dy}{dx} = x^2(\cos x) + (2x)(\sin x) = x^2 \cos x + 2x \sin x$

(ii) $\frac{dy}{dx} = 4[(e^x)(\cos x) + (e^x)(-\sin x)] = 4e^x [\cos x - \sin x]$

Example: 20 dy/dx ज्ञात करों यदि y = tan x .

Solution: $\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Example: 21 $y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$ का अवकलज ज्ञात करो।

Solutin: $u = t^2 - 1$ तथा $v = t^2 + 1$ भागफल का नियम लगाने पर

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{(t^2+1).2t - (t^2-1).2t}{(t^2+1)^2}$$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dt) - u(dv/dt)}{v^2}\right) = \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}.$$

4.5 द्वितीय अवकलन:

y = f(x) का द्वितीय अवकलन निम्न प्रकार लिखा जाता है-

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Example: 22 (a) $\frac{d}{dx}\cos 3x$, (b) $\frac{d}{dx}\sin 2x$, (c) $\frac{d}{dt}(A\sin(\omega t+\phi)$

Solution: (a) $\frac{d}{dx}\cos 3x = -\sin 3x\frac{d}{dx}3x = -3\sin 3x$

(b) $\frac{d}{dx}\sin 2x = \cos 2x\frac{d}{dx}(2x) = \cos 2x \,.\, 2 = 2\cos 2x$

(c) $\frac{d}{dt}(A\sin(\omega t+\phi) = A\cos(\omega t+\phi)\frac{d}{dt}(\omega t+\phi) = A\cos(\omega t+\phi).\,\omega. = A\,\omega\cos(\omega t+\phi)$

Example: 23 यदि $y = 4x^2$ है, तो $\frac{dy}{dt}$ का मान क्या होता है ?

Solution: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 8x.\frac{dx}{dt}$

Example: 24 यदि $f(x) = x\cos x$, तो $f''(x)$ ज्ञात करो।

Solution: गुणनफल नियम का प्रयोग करें we have $\Rightarrow f'(x) = x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x) = -x\sin x + \cos x$

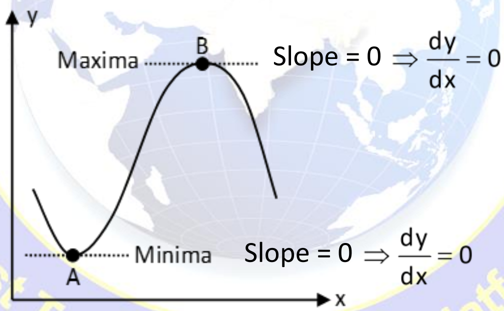
$f''(x)$ ज्ञात करने के लिए $f'(x)$ का आकलन करने पर:

$f''(x) = \frac{d}{dx}(-x\sin x + \cos x) = -x\frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x\frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(\cos x) = -x\cos x - \sin x - \sin x$

$= -x\cos x - 2\sin x$

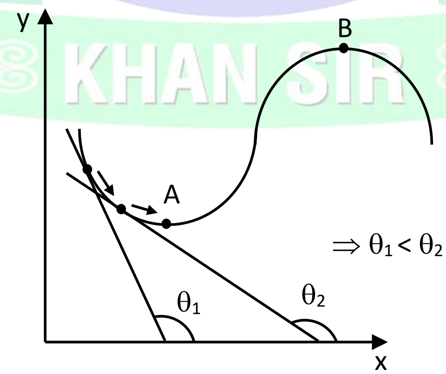
4.6 फलन का उच्चतम तथा निम्नतम मान

फलन का उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात करने के लिये उच्चकोटि के अवकलज का उपयोग किया जाता है। उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दुओं पर प्रथम अवकलज शून्य होता है।



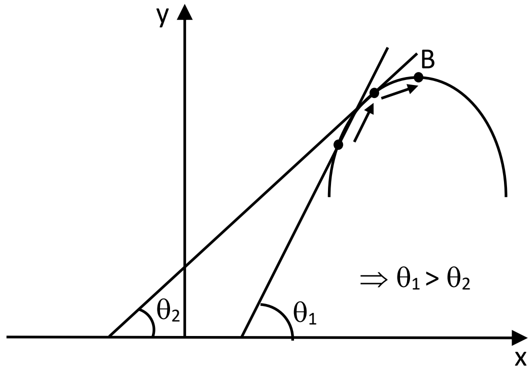
➢ बिन्दु 'A' पर निम्नतम: चित्रानुसार A के समीपवर्ती ढाल बढ़ता है

अत: $\frac{dy}{dx}$ is ↑ $\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0$.



➢ बिन्दु 'B' पर उच्चतम: चित्रनुसार B के समीपवर्ती ढाल घटता है,

अत: $\frac{dy}{dx}$ is ↓ $\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0$.



SPOT LIGHT

निम्निष्ठ कि शर्त : $\frac{dy}{dx} = 0$ and $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ **उच्चिष्ठ कि शर्त :** $\frac{dy}{dx} = 0$ and $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

4.7 अवकलनः (परिवर्तन की दर)

'y' के 'x' के सापेक्ष परिवर्तन की दर = $\frac{dy}{dx}$

(i) वेग :- समय t के सापेक्ष 'x' में परिवर्तन कि दर अत: v = $\frac{dx}{dt}$

(ii) त्वरण :- समय t के सापेक्ष वेग 'v' में परिवर्तन कि दर अत: a = $\frac{dv}{dt}$

(iii) बल:- समय t के सापेक्ष 'p' में परिवर्तन कि दर अत: F = $\frac{dp}{dt}$

Example: 25 निम्न का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

(i) $y = 1 + x^2 - 2x$ (ii) $y = 5x^2 - 2x + 1$.

Solution: (i) $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$ $\Rightarrow$ निम्निष्ठ के लिए

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0$

x = 1 पर निम्निष्ठ है y के न्यूनतम मान के लिए

$y_{\text{न्यूनतम}} = 1 + 1 - 2 = 0$

(ii) अधिकतम व न्यूनतम मान के लिए

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 5(2x) - 2(1) + 0 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

अब $x = \frac{1}{5}$, पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 10$ जो कि धनात्मक है अत: $x = \frac{1}{5}$ पर निम्निष्ठ होगा

अत: $y_{min} = 5\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{5}\right) + 1 = \frac{4}{5}$

Example: 26 वृत्त का क्षेत्रफल A उसके व्यास से $A = \frac{\pi}{4}D^2$. समीकरण द्वारा संबंधित है। व्यास के सापेक्ष क्षेत्रफल में परिवर्तन की दर कितनी तीव्र होगी, जब व्यास 10 m है ?

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Solution: व्यास के सापेक्ष क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर (तात्क्षणिक)

$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi}{4} 2D = \frac{\pi D}{2}$

जब D = 10 m हो तो क्षेत्रफल परिवर्तन की दर $(\pi/2)\ 10 = 5\pi\ m^2$

5. समाकलन (INTEGRAL CALCULUS)

5.1 अनिश्चित समाकलन Indefinite Integral:

समाकलन अवकलन की विपरीत प्रक्रिया है। समाकलन की सहायता से हम उस फलन को ज्ञात कर सकते हैं, जिसका अवकलज ज्ञात हो। माना फलन F(x) जिसका x के सापेक्ष अवकलज f(x) के बराबर है, तब

$\int f(x)dx = F(x) + c$

जहाँ c समाकलन नियतांक है तथा इसे अनिश्चित समाकलन कहते हैं।.

➢ **समाकलन के कुछ आधार सूत्र**

	अनिष्चित समाकलन	व्युत्पन्न अवकलन सूत्र
1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, n = परिमित संख्या $\int dx = \int 1dx = x + C$ (special case)	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ $\frac{d}{dx}(x) = 1$
2.	$\int \sin x = \cos x + C$	$\frac{d}{dx}\left(-\frac{\cos kx}{k}\right) = \sin kx$
3.	$\int \cos x = \sin x + C$	$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \cos kx$
4.	$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$	$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$
5.	$\int \text{cosec}^2 x dx = -\cot x + C$	$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \text{cosec}^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
7.	$\int \text{cosec}\, x \cot x\, dx = -\text{cosec}\, x + C$	$\frac{d}{dx}(-\text{cosec}\, x) = \text{cosec}\, x \cot x$
8.	$\int \frac{1}{x} = \ell n\,(x) + C$	

5.2 समाकलन के लिए नियम

➢ **स्थिर गुणांक नियम**

एक फलन किसी फलन f के स्थिर गुणक kf का प्रतिअवकलज है यदि और केवल यदि यह f का k गुना एक प्रतिअवकलज है।

$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$; जहाँ k स्थिरांक है

➢ **जोड़ना व घटाने का नियम**

किसी फलन के प्रतिअवकलन का योग या अन्तर $f \pm g$ हो, तो यह सिर्फ योग या अन्तर हैं। g वे प्रतिअवकलन के f के प्रतिअवकलन का

$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

- **प्रतिस्थापन नियम**

$\int f(g(x)) . g'(x)\, dx = \int f(u)du$ 1. Substitute $u = g(x)$, $du = g'(x)\, dx$.

$= F(u) + C$ 2. $f(u)$ का प्रतिअवकलज $F(u)$ ज्ञात करके मूल्यांकन करें। (कोई भी चलेगा।)

$= F(g(x)) + C$ 3. u का g(x) के साथ परिवर्तन

5.3 निश्चित समाकलन (Definite Integration) :

जब फलन को निम्न सीमा व उच्च सीमा के मध्य समाकलित करते हैं तो उसे निश्चित समाकल कहते हैं। एक अन्तराल $a \le x \le b$ में माना कि फलन F(x) जिसका x के सापेक्ष अवकलन f(x) है तब

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Example: 27 (i) $\int 5x^2 dx$ (ii) $\int \frac{7}{x^2}dx$ (iii) $\int \frac{t}{\sqrt{t}}dx$

Solution: (i) $\frac{5x^3}{3} + C$ (ii) $\int 7x^{-2}dx = \frac{-7}{x} + C = \frac{-7x^{-1}}{1} + C$

(iii) $\int t^{1/2}dt = \frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}t^{3/2} + C$

Example: 28 निम्न का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात करो।

(i) $4x^3$ (ii) $x - \frac{1}{x}$ (iii) $\frac{1}{2x+3}$ (iv) $\cos(4x+3)$

Solution: (i) $\int 4x^3 dx = 4\left(\frac{x^{3+1}}{3+1}\right) + c = \frac{4x^4}{4} + c = x^4 + c$

(ii) $\int\left(x - \frac{1}{x}\right)dx = \int x dx - \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2} - \ln x + c$

(iii) $\int \frac{dx}{2x+3} = \frac{\ln(2x+3)}{2} + c$

(iv) $\int \cos(4x+3)dx = \frac{\sin(4x+3)}{4} + c$

Example: 29 निम्न का x के सापेक्ष समाकलन कीजिए।

(i) $\cos^2 x$ (ii) $\sin^2 x$

Solution: (i) $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{2\cos^2 x}{2}\, dx = \int \frac{(1+\cos 2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + c$

(ii) $\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{(1-\cos 2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + c = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + c$

Example: 30 $\int_1^5 x^2\, dx$ का समाकलन है :

Solution: $\int_1^5 x^2\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^5 = \left[\frac{5^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = \frac{125}{3} - \frac{1}{3} = \frac{124}{3}$

Example: 31 समाकलन $\int_{-1}^{4} 3dx$ बराबर है :–

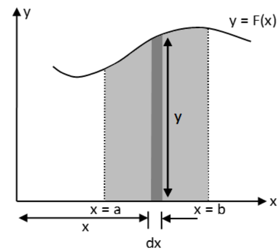
Solution: $3\int_{-1}^{4} dx = 3\,[x]_{-1}^{4} = 3[4 - (-1)] = (3)(5) = 15$

5.4 समाकलन के अनुप्रयोग

- **वक्र के नीचे का क्षेत्रफल (Area under the curve) :**

  प्रदर्शित लघु अवयव का क्षेत्रफल = ydx = f(x) dx

  यदि हम x=a तथा x= b के मध्य सभी क्षेत्रफलों का योग करें तो $\int_a^b f(x)dx$ = वक्र तथा x-अक्ष के मध्य छायांकित क्षेत्रफल



- **औसत मान (Average value)**

  यदि y = f (x) है, तो y औसत = $\dfrac{\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx}{b-a}$

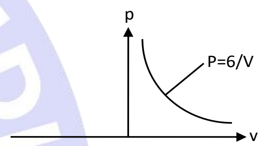
  = $\dfrac{\text{वक्र से घिरा क्षेत्रफल}}{\text{अन्तराल}}$

Example: 32 वक्र y = x का x = 0 से x = a तक क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Solution: $\int_0^a ydx = \left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^a = \dfrac{a^2}{2}$

Example: 33 एक गैस चित्र में दर्शाए अनुसार V से 3V तक आयतन में प्रसारित की जाती है। इस प्रक्रम में किए गए कार्य की गणना कीजिए यदि

W = $\int pdv$.



(1) 6.6 (2) 6.9

(3) 3 (4) 3.5

Solution: W = $\int_v^{3v} pdv \Rightarrow \int_v^{3v} \dfrac{6}{v}dv = [6\log_e v]_v^{3v}$ = 6.6 J

Example: 34 t = 0 से t = 4 सैकण्ड़ तक के औसत मान की गणना कीजिऐ।

(1) 2.5 (2) 3 (3) 3.5 (4) 2

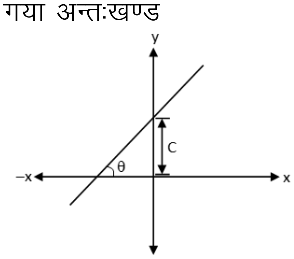
Solution: $I_{average} = \dfrac{\int_a^b Idt}{\int_a^b dt} = \dfrac{\text{कुल क्षेत्रफल}}{\text{कुल समय}} = \dfrac{5\times 2}{4}$ =2.5 amp

6. ग्राफ (GRAPHS)

6.1 सरल रेखा समीकरण तथा इसका ग्राफ :

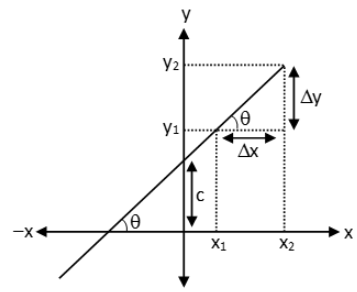
y = mx + c

m = रेखा की प्रवणता; c = y-अक्ष पर काटा गया अन्तःखण्ड



➢ **ढाल:**

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR



किसी रेखा का ढाल उसके झुकाव का संख्यात्मक मान है। इसे अश्रित चर में परिवर्तन तथा अनाश्रित चर में परिवर्तन के अनुपात से व्यक्त करते हैं। अतः

रेखा की ढाल = रेखा की प्रवणता = $\frac{dy}{dx}$

रेखा द्वारा धनात्मक x-अक्ष से बनाये गये कोण (θ) का स्पर्शज्या फलन होता है।

$m = \tan\theta$

कई बार ढ़ाल को प्रवणता भी कहते है।

➢ **अन्तःखण्ड :**

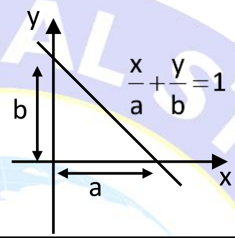
इसका मान उस y निर्देशांक के बराबर होता है जहां रेखा y-अक्ष को काटती है। यदि रेखा धनात्मक y-अक्ष, या ऋणात्मक y-अक्ष से अथवा मूल बिन्दु से गुजरे तो इसका मान क्रमशः धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य होता है।

DETECTIVE MIND

रेखा का अन्तःखण्ड रूप:

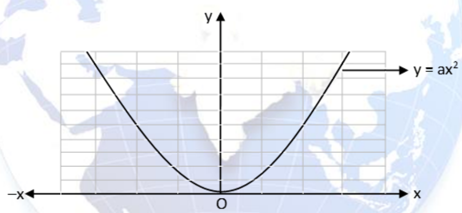
अन्तःखण्ड : की समीकरण $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

जहाँ a व b क्रमश : x व y अक्ष पर अन्तःखण्ड है



6.2 परवलय का समीकरण तथा इसका आरेख

$y = ax^2 + bx + c$ रूप वाले फलन को परवलय कहते हैं। परवलय का सबसे सरलतम रूप $y = ax^2$ है। इसका ग्राफ नीचे चित्र में दर्शाया गया है।

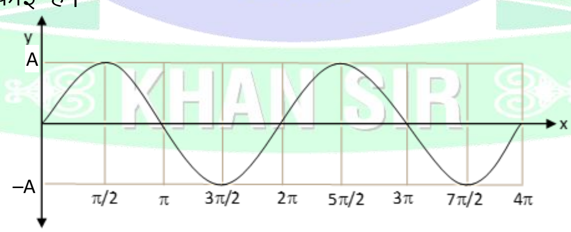


6.3 कुछ त्रिकोणमितीय फलनों के ग्राफ

सभी त्रिकोणमितीय फलनों में से ज्यावक्रीय फलनों (जिसमें ज्या तथा कोज्या फलन होते हैं) का अधिक उपयोग किया जाता है।.

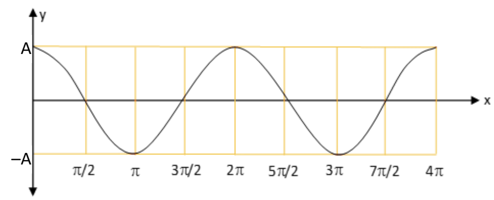
➢ **ज्या फलन (Sine Function) :** $y = a \sin x$

यहाँ, a, आयाम कहलाता है तथा यह y के अधिकतम परिमाण के तुल्य होता है। चित्र में ज्या फलन के ग्राफ को दर्शाया गया है जिसका आयाम a इकाई है।



➢ **कोज्या फलन :** $y = A \cos x$

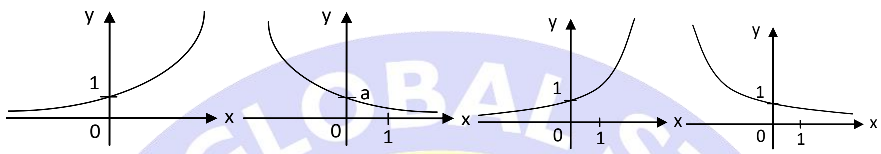
यहाँ A आयाम कहलाता है तथा यह y के अधिकतम परिमाण के तुल्य होता है चित्र में कोज्या फलन के ग्राफ को दर्षाया गया है जिसमे आयाम a इकाई है



6.4 चरघातांकी फलन तथा इसका ग्राफ :

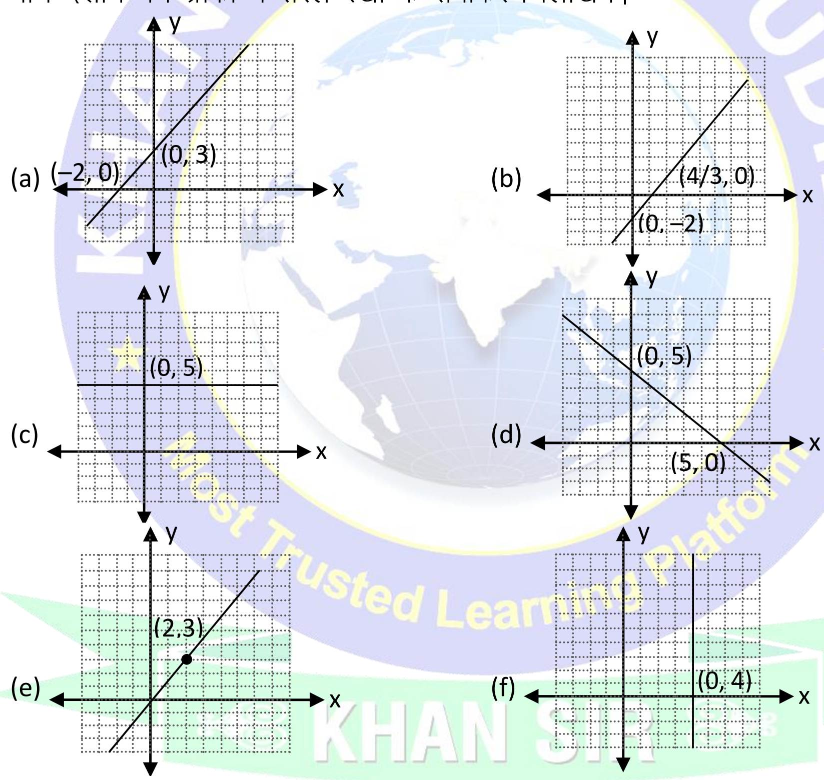
विभिन्न भौतिक घटनाओं को आधार e (base e) वाले चरघातांकी फलनों के रूप में प्रदर्शित करते हैं। यहां 'e' 'यूलर' संख्या कहलाती है। e = 2.718218

भौतिकी में $y=ae^{-x}$ रूप वाले चरघातांकी फलनों का अधिक उपयोग होता है। दिये गये चित्र में इस फलन को दर्शाया गया है।



(a) $y = e^x$ (b) $y = ae^{-x}$ (c) $y = 2^x$ (d) $y = (0.5)^x$

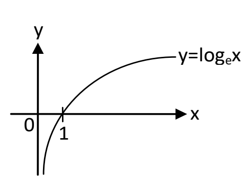
Example: 35 नीचे दर्शाये गये ग्राफों में सरल रेखा के समीकरण लिखिये।



Solution: (a) $y = \frac{3}{2}x + 3$; (b) $y = \frac{3}{2}x - 2$; (c) $y = 5$;

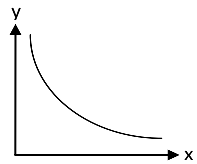
(d) $\frac{y}{5} + \frac{x}{5} = 1$; (e) $y = \frac{3}{2}x$; (f) $x = 4$

6.5 लघुगुणक फलन:



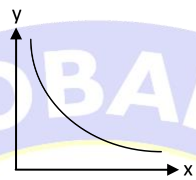
6.6 आयताकार अतिपरवलय:

$xy = c^2$



6.7 अति परवलयकार:

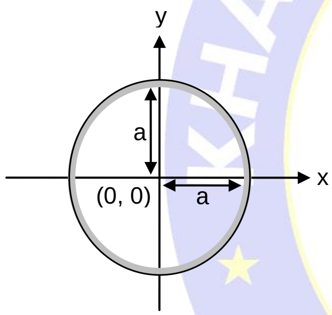
$y = \frac{k}{x^n}$ (k एक धनात्मक नियतांक है।)

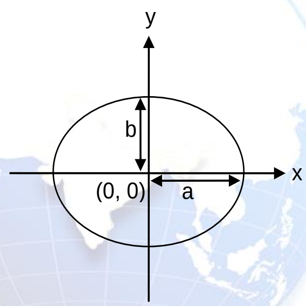


6.8 वृत्त तथा दीर्घवृत्त :

वृत्त : $x^2 + y^2 = a^2$

दीर्घवृत्त : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

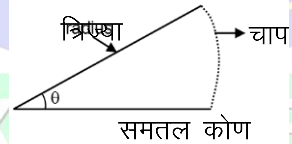




6.9 समतल कोण (दो रेखाओं के मध्य का कोण)

समतल कोण एक तल के साथ रेखा के घूर्णन कि त्रिज्या माप है

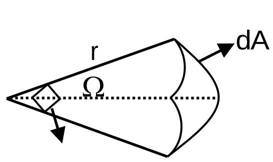
समतल कोण $d\theta = \frac{ds}{r}$

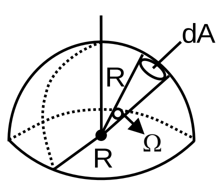


6.10 ठोस कोण :

यह कोण का 3D अनुरूप है जैसे शंकु द्वारा अंतरित या एक बिन्दु पर मिलने वाले तलो द्वारा निर्मित है

ठोस कोण $\Omega = \frac{dA}{r^2}$





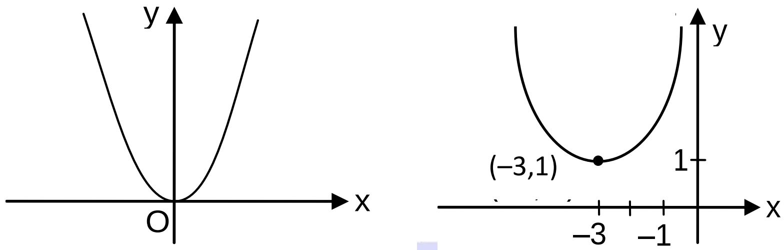
KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR

Example: 36 फलन का आरेख बनाईये।

$f(x) = x^2 + 6x + 10.$

Solution: $y = x^2 + 6x + 10 = (x + 3)^2 + 1$

आरेख $y = x^2$ को 3 से दांयी ओर तथा 1 से ऊपर की ओर स्थानान्तरण करके प्राप्त कर सकते हैं।



(a) $y = x^2$ (b) $y = (x+3)^2+1$

---

7. भौतिक राशियां (PHYSICAL QUANTITIES)

भौतिकी में हम दो भौतिक राशियों की बात करते हैं एक अदिश और दूसरी सदिश राशियाँ। प्रत्येक अदिश राशि परिमाण और मात्रक रखती है। किसी भौतिक राशि के परिमाण का अर्थ आंकिक मान तथा उस भौतिक राशि के मात्रक का गुणनफल होता है।

भौतिक राशिया

अदिश राशिया

- सिर्फ परिमाण होता है
- सिर्फ यह बीजगणित के नियमो पर लागू होता है
- इसे इसके परिमाण के साथ बदला जा सकता है
- यह दूसरे अदिश को विभाजित कर सकती है
- यह एक विमीय राषिया है
- इन्हे जोड़ा व घटाया जा सकता है व सामान्य नियम से गुणा कर दिया जाता है
- उदाहरणः द्रव्यमान, चाल, दूरी आदि

सदिश राशिया

- परिमाण व दिशा दोनो होती है
- यह सिर्फ बीजगणित सदिश नियम पर लागू होती है
- इसमे यह परिमाण व दिशा दोनो परिवर्तित हो सकते है
- यह दूसरे किसी सदिश के भाग मे नही बाटॉ जाता है
- यह बहु विमीय राशिया होती है (1D, 2D & 3D)
- यह समान्तर चतुर्भुज व क्रम विनिमय योग नियम का पालन करते है
- उदाहरणः वेग, त्वरण

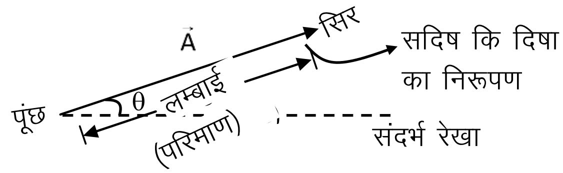
SPOT LIGHT

- यदि कोई भोतिक राशि सदिश है तो उसकी दिशा होती है लेकिन इसका उलटा भी हो सकता है नही भी हो सकता। अतः भौतिक राशियो के पास दिशा भी होती है यह सदिश भी हो सकती है।
 उदाहरण : दाब, पृष्ठ तनाव या धारा आदि।

8. सदिश (VECTOR):

8.1 सदिश को व्यक्त करना :

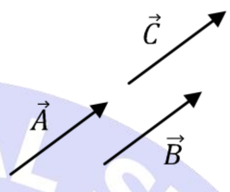
➢ ज्यामितीय रूप से, सदिश को एक तीर के निशान वाली रेखा द्वारा (→) व्यक्त किया जाता है जो कि सदिश की दिशा को पुंछ के सापेक्ष व्यक्त करता हैं।, गणितीय रूप से, सदिश को $\vec{A}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। $\vec{A}=|\vec{A}|\hat{A}=A\hat{A}$.



➢ सदिष का $(\vec{A})$ परिमाण सदिष का निरपेक्ष मान होता है इसे $|\vec{A}|$ या A से व्यक्त करते है

➢ $\hat{A}$ सदिष $\vec{A}$ कि दिषा में इकाई सदिष है

➢ यदि किसी सदिश को स्वंय के सापेक्ष समान्तर स्थानान्तरित कर दिया जाय तो यह परिवर्तित नहीं होता है। चित्र देखो।



$\vec{A}=\vec{B}=\vec{C}$
स्वंय के समान्तर सदिष का संक्रमण

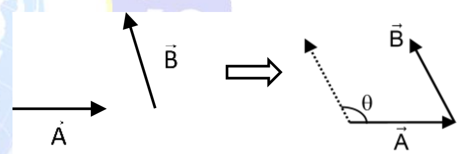
➢ यदि किसी सदिश को कोण 2π (or 360°) के गुणक के अलावा किसी अन्य कोण पर घुमा दिया जाये तो यह सदिश परिवर्तित हो जाता है। चित्र देखो।

➢ दो सदिश बराबर कहलाएंगे यदि इनके परिमाण व दिशा समान हो तथा दोनों समान भौतिक राशि के मान को प्रदर्शित करें।

$\vec{A}\neq\vec{B}$ सदिष का घूर्णन

8.2 दो सदिशो के मध्य कोण (Angle between two vectors) :

➢ दो सदिशों के बीच कोण का अर्थ है कि जब दो सदिशों को स्वंय के सापेक्ष समान्तर स्थानान्तरित करके दोनों की पूंछ मिलाने पर बने दोनों कोणों में से छोटा कोण दोनों सदिशों के बीच का कोण कहलाता है। (अर्थात् $0\le\theta\le\pi$).

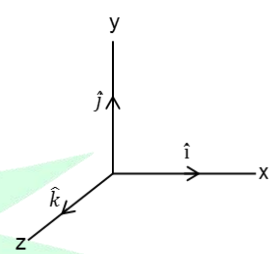


8.3 सदिश के प्रकार (TYPE OF VECTOR)

➢ **इकाई सदिश:**

वह सदिश जिसका परिमाण एक (इकाई) हो तथा एक निश्चित दिशा की तरफ निर्देशित हों एकांक सदिश कहलाता है। किसी भी सदिश $(\vec{A})$ को इसकी दिशा में एकांक सदिश $(\hat{A})$ व इसके परिमाण के गुणन के रूप मे लिख सकते है।

$\vec{A}=A\ \hat{A}$ या $\hat{A}=\dfrac{\vec{A}}{A}$ ($\hat{A}$ = A के दिषा का इकाई सदिष है)

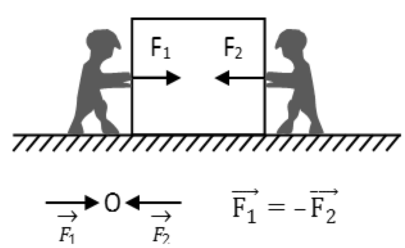


एकांक सदिश की कोई भी विमा या मात्रक नहीं होता है। त्रिविमिय निर्देश तन्त्र में x, y और z-अक्षों के अनुदिश एकांक सदिश क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ के द्वारा प्रदर्शित किये जाते है। इनके परिमाण $|\hat{i}|=|\hat{j}|=|\hat{k}|=1$ होते है।

➢ **शून्य सदिश:**

शून्य सदिश वह सदिश है जिसका परिमाण शून्य व दिशा स्वैच्छिक हो। यह निम्न उदाहरण से स्पष्ट होगा।

जब दो व्यक्ति एक वस्तु को समान व विपरीत बल $\vec{F}_1$ व $\vec{F}_2$ से धकेलते है तो परिणामी बल $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=0$ है, क्योकि वस्तु त्वरित नही होती है। चूंकि कण का त्वरण शून्य है। इसलिए हम कह सकते है कि त्वरण की दिशा ज्ञात करना असंभव है। दूसरे शब्दो में हम कह सकते है कि शून्य सदिश की दिशा स्वैच्छिक (निश्चित नही) है।



शून्य सदिश के उदाहरण निम्न है :

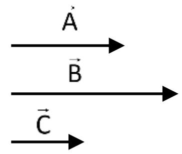
1. एक स्थिर वस्तु का वेग
2. दो व्यक्ति एक रस्सी को समान बल से विपरीत दिशा में खींच रहे है।
3. एक वस्तु को ऊपर फेंकने पर एवं उसे पुनः समान स्थिति पर पकड़ने पर उसके द्वारा प्राप्त विस्थापन

4. एक प्लेटफार्म पर अभी तक खड़ी एक ट्रेन का वेग
5. एकसमान वेग से जाने वाली एक कार का त्वरण

DETECTIVE MIND

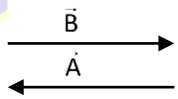
- शून्य सदिष की दिषा होती है परन्तु अनिष्चित होती है

- **समान्तर सदिष:-** वे सदिष जिनकी दिषा समान होती है समान्तर सदिष कहलाते है दो समान्तर सदिष के मध्य का कोण 0° होता है



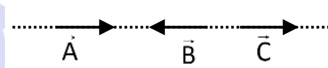
$\vec{A}$, $\vec{B}$ व $\vec{C}$ समान्तर है

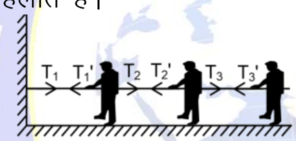
- **प्रतिसमान्तर सदिष:-** जिन सदिशों की दिशा विपरीत होती है अर्थात उनके बीच का कोण सदैव 180° होता है, वे प्रति–समान्तर सदिश कहलाते हैं।



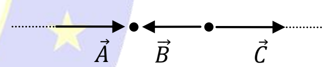
- **संरेखीय सदिष (Collinear Vectors) :**

यदि दो या दो से अधिक सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ व $\vec{C}$ इत्यादि समान सरल रेखा से गुजरते है, तो वे संरेखीय सदिश कहलाते है।





यदि दो या दो से अधिक सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ व $\vec{C}$ इत्यादि समान सरल रेखा से गुजरते है, तो वे संरेखीय सदिश कहलाते है। उदाहरण के लिए, जब बहुत से व्यक्ति एक सीधी रस्सी को इसके भिन्न बिन्दुओं से खींचते है, तो डोरी में तनाव T_1, T_1', T_2, T_2', …… T_3' इत्यादि संरेखीय है।

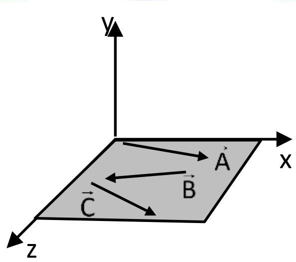


$\vec{A}$,$\vec{B}$,$\vec{C}$ समान रेखा के अनुदिश कार्यरत है। सभी तनाव T_1,T_1', T_2, T_2' इत्यादि संरेखीय है, परन्तु एक समान दिशा में नही है।

- **समतलीय सदिश :**

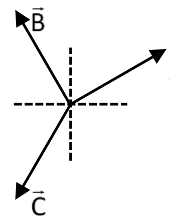
यदि दो या दो से अधिक सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ समान तल में है, वे समतलीय कहलाते है। यहाँ $\vec{A}$, $\vec{B}$ तथा $\vec{C}$ समतलीय है जब वे कागज (Paper) के तल में स्थित है।

समतलीय सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ व $\vec{C}$ कागज के तल में स्थित है।



- **संगामी सदिश :**

यदि सभी सदिशो की क्रिया रेखा समान बिन्दु से गुजरती है, तो सदिश संगामी सदिश कहलाते है।

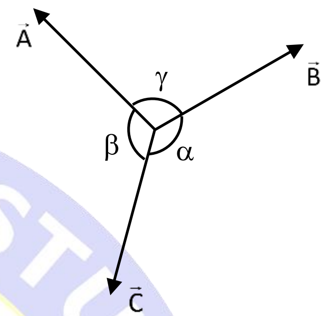


$\vec{A},\vec{B}\,\&\,\vec{C}$ संगामी सदिष है

DETECTIVE MIND

लामी प्रमेय: - जब तीन बल किसी बिन्दु पर साम्यवस्था मे हो तो

$$\Rightarrow \frac{A}{\sin\alpha}=\frac{B}{\sin\beta}=\frac{C}{\sin\gamma}$$



A, B, C सदिषो के परिमाण $\vec{A},\vec{B}\,\&\,\vec{C}$ है

8.4 सदिश राशि का अदिश राशि से गुणन (MULTIPLICATION OF A VECTOR BY A SCALAR) :

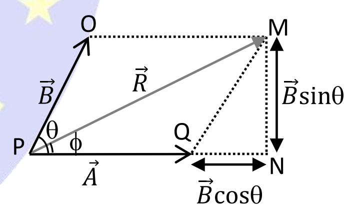
किसी सदिश $\vec{A}$ को धनात्मक संख्या λ से गुणा करने पर प्राप्त सदिश $\vec{B}(=\lambda\vec{A})$ का परिमाण λ के गुणक के रूप में बदल जाता है। परन्तु दिशा सदिश $\vec{A}$. के समान ही रहती है। किसी सदिश $\vec{A}$ को ऋणात्मक संख्या λ से गुणा करने पर प्राप्त सदिश $\vec{B}$ की दिशा, $\vec{A}$ की दिशा के विपरीत तथा इसका परिमाण का λ गुना होता है।

If $\vec{B}=\lambda\vec{A} \Rightarrow |\vec{B}|=\lambda|\vec{A}|$ and $\hat{B}=\hat{A}$.

8.5 सदिशों का योग (ADDITION OF VECTORS):

➢ **सदिशों के योग का समान्तर चर्तुभुज नियम:**

यदि दो सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ किसी समान्तर चर्तुभुज की बाहर की तरफ निर्देशित (इनकी पूंछ एक बिन्दु पर स्थित है) दो क्रमागत भुजाओं को निरूपित करते है तो इन सदिशों के प्रतिच्छेद या कटान बिन्दु से खींची गई विकर्ण दोनों सदिशों के परिणामी को व्यक्त करती है। (अर्थात् $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के सदिश योग को)



$$R=\sqrt{A^2+B^2+2AB\cos\theta}$$

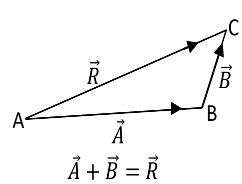
परिणामी सदिश $\vec{R}$ का, $\vec{A}$ की दिशा से बनाया गया कोण

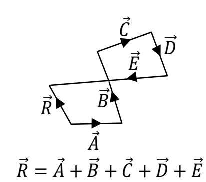
$$\tan\phi=\frac{MN}{PN}=\frac{MN}{PQ+QN}=\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}$$

$$\phi=\tan^{-1}\left(\frac{B\sin\theta}{A+B\cos\theta}\right)$$

➢ **त्रिभुज नियम (Triangle law) :**

दो सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ को जोड़ने के लिए दोनों में से किसी एक सदिश को स्वंय के सापेक्ष समान्तर विस्थापित करके $\vec{B}$ की पूंछ को $\vec{A}$ के सिर पर रखते है। $\vec{A}+\vec{B}$ के परिणामी सदिश $\vec{R}$ को सदिश $\vec{A}$ की पूंछ से, सदिश $\vec{B}$ के सिर तक रेखा खींचकर प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात् $\vec{A}+\vec{B}=\vec{R}$ है तथा इन सदिशों के निरूपण से बना इस प्रकार से निरूपित चित्र त्रिभुज को प्रदर्शित करता है। इसलिए सदिशों के संयोजन की इस विधि को 'त्रिभुज विधि' कहते



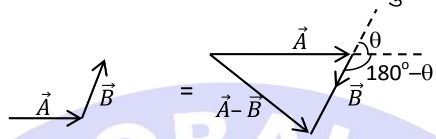


यदि त्रिभुज नियम के द्वारा बहुत सारे सदिशों को जोड़ने के विस्तारित प्रक्रम को चित्र द्वारा देखें तो इसके द्वारा बनी आकृत्ति एक बहुभुज को प्रदर्शित करती है तथा सदिशों के संयोजन के इस नियम को बहुभुज नियम कहते है।

8.6 सदिशो का व्यवकलन (SUBTRACTION OF VECTORS):

- सदिश $-\vec{b}$, $\vec{b}$ की भाँति समान परिमाण रखता है परन्तु, इसकी दिशा विपरीत है, इन दोनो सदिशो को जोड़ने पर $\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{0}$
- किसी सदिश में से सदिश को घटाना वास्तव में ऋणात्मक सदिश को जोड़ना होता है

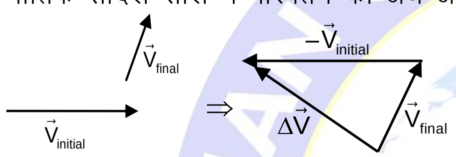
  $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$
- चित्र से अच्छी तरह समझ सकते है कि $\vec{A}-\vec{B}$ सदिश $\vec{A}$ व सदिश $\vec{B}$ के व्युत्क्रम का योग है।



$|\vec{A}-\vec{B}| = [(A)^2 + (B)^2 + 2AB\cos(180° - \theta)]^{1/2}$

$= |\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}$

भौतिक सदिश राशि में परिवर्तन का अर्थ अन्तिम सदिश में से प्रारम्भिक सदिश को घटाना है।



- यदि $R = [A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta]^{1/2}$ हो तो R अधिकतम होगा जब $\cos\theta$ = अधिकतम = 1 हो अर्थात् $\theta = 0°$, अर्थात् दोनों सदिश समान्तर हो और $R_{अधिकतम} = A + B$
- परिणामी सदिश न्यूनतम होगा यदि $\cos\theta$ = न्यूनतम = -1, अर्थात् $\theta = 180°$ अर्थात् दोनों सदिश प्रतिसमान्तर (विपरीत दिशा में) हो और $R_{न्यूनतम} = A - B$
- यदि सदिश A व B लम्बवत् हो तो $\theta = 90°$ और R = $\theta = 90°$, $R = \sqrt{A^2+B^2}$
- समान परिमाण (A_0) वाले दो सदिशो का योग

  $R = 2A_0\cos^2\dfrac{\theta}{2}$
- समान परिमाण (A_0) वाले दो सदिशो का घटाव

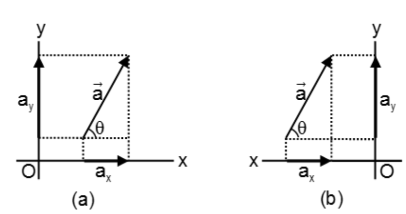
  $S = 2A_0\sin^2\dfrac{\theta}{2}$

DETECTIVE MIND

- समतलीय असमान सदिशों की न्यूनतम संख्या जिनका परिणामी शून्य हो तीन होती है।.
- तीन असमतलीय सदिशों का परिणामी कभी भी शून्य नहीं हो सकता या असमतलीय सदिशों की न्यूनतम संख्या जिनका परिणामी शून्य हो चार होती है।

8.7 सदिशो का वियोजन (Resolution of Vectors) :

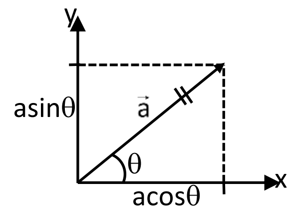
एक सदिश का एक घटक अक्ष पर सदिश का प्रक्षेपण है। उदाहरण के लिए x अक्ष पर (या अनुदिश) सदिश का घटक a_x है तथा y अक्ष के अनुदिश घटक a_y है। अक्ष के अनुदिश एक सदिश का प्रक्षेपण ज्ञात करने के लिए हम सदिश के दो सिरो से अक्ष तक लम्बवत रेखाऐं आरेखित करते है। एक x अक्ष पर एक सदिश का प्रक्षेपण x घटक है तथा इसी प्रकार y अक्ष पर प्रक्षेपण y घटक है। एक सदिश के घटक ज्ञात करने की प्रक्रिया सदिशो का वियोजन कहलाती है। सामान्यतः एक सदिश के तीन घटक होते है। यद्यपि 2D सदिशो की स्थिति में z अक्ष के अनुदिश घटक शून्य होता है।



- **द्विवीमीय वियोजन**

सामान्यत: सदिषो के तीन घटक होते है हालांकि 2D सदिषो की स्थिति में Z अक्ष के साथ घटक शून्य है।

$\vec{a} = a\sin\theta\hat{i} + a\cos\theta\hat{j}$

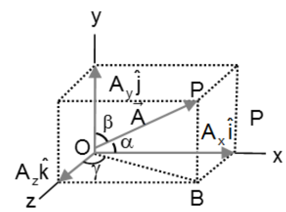


➢ **त्रिविमिय वियोजन :**

त्रिविमिय दिशा में किसी सदिश $\vec{A}$ को x, y तथा z-अक्ष के अनुदिश घटको के रूप में निम्न प्रकार से लिख सकते है :

$\Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$\Rightarrow A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \Rightarrow \quad A_x = A\cos\alpha,\ A_y = A\cos\beta,\ A_z = A\cos\gamma$



यहां $\cos\alpha$, $\cos\beta$ और $\cos\gamma$ को दिये गये सदिश $\vec{A}$ की दिक् कोज्याएं (Direction Cosines) कहते है।

SPOT LIGHT

➢ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

➢ $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$

DETECTIVE MIND

➢ सदिश $\vec{A}$ को दो सदिशो के योग द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। $\vec{A} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ (जहाँ λ तथा μ वास्तविक संख्या है)

8.8 सदिशों के गुणनफल (MULTIPLICATION OF VECTORS) :

➢ **अदिश गुणन : (dot product)**

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$ {यहां θ दोनों सदिशों के बीच का कोण है।}

गुणधर्म

☞ यह हमेशा अदिश होता है। यदि दोनों के बीच का कोण न्यूनकोण (i.e. < 90°) है तो यह धनात्मक होगा और यदि कोण अधिक कोण (i.e. $90° < \theta \le 180°$) हो तो यह ऋणात्मक होगा।

☞ यह क्रम विनिमय का पालन करता है। अर्थात् $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$

☞ यह वितरण नियम (distributive law) का पालन करता है अर्थात $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A} = \vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}$

☞ तो दोनों सदिशों के बीच कोण $\theta = \cos^{-1}\left[\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right]$

☞ दो सदिशों का अदिश गुणनफल अधिकतम होता है, जब $\cos\theta$ = अधिकतम = 1, अर्थात् $\theta = 0°$ अर्थात् सदिश समान्तर हो $\Rightarrow$ $(\vec{A}\cdot\vec{B})_{max} = AB$

☞ यदि दो अशून्य सदिशों का अदिश गुणनफल शून्य हो तो सदिश एक दूसरे के लम्बवत् होंगे।

☞ किसी सदिश का स्वंय के साथ अदिश गुणनफल स्व अदिश गुणन कहलाता है।

$(\vec{A})^2 = \vec{A}.\vec{A} = AA\cos\theta = AA\cos0° = A^2 \qquad \Rightarrow \qquad A = \sqrt{\vec{A}.\vec{A}}$

☞ $\hat{n}\cdot\hat{n} = \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$

☞ $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$

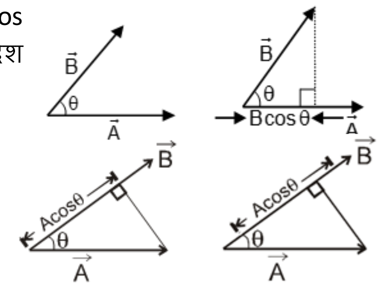
☞ $\vec{A}\cdot\vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) . (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = [A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z]$

➢ **सदिशों का प्रक्षेपण :**

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,(B\cos\theta) = B\,(A\cos\theta)$

ज्यामितीय रूप से चित्रानुसार $B\cos\theta$ सदिश $\vec{B}$ का सदिश $\vec{A}$ पर प्रक्षेप है और $A\cos\theta$ सदिश $\vec{A}$ का $\vec{B}$ पर प्रक्षेप है। इसलिए $\vec{A}\cdot\vec{B}$ को $\vec{A}$ के परिमाण व $\vec{B}$ का $\vec{A}$ के अनुदिश घटक के गुणनफल के रूप में व्यक्त करते है और इसका विपरीत भी सत्य है।



$\vec{B}$ का $\vec{A}$ के अनुदिश घटक $= B\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A} = \vec{B}.\hat{A}$

$\vec{A}$ का $\vec{B}$ अनुदिश घटक $= A\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{B} = \vec{A}.\hat{B}$

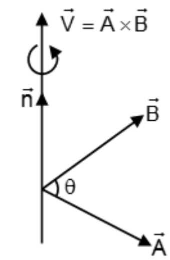
➢ **सदिश गुणन :**

$\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$

यहां θ दोनों सदिशों के बीच का कोण है तथा $\hat{n}$ की दिशा दांये हाथ के अंगूठे के नियम द्वारा दी जाती है।

दांहिने हाथ–अंगूठे का नियम (Right-Hand-Thumb Rule)

$\hat{n}$ की दिशा ज्ञात करने के लिये दो सदिश $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ को उनकी पूंछ से पूंछ मिलाकर खींचों अब अपनी खिंची हुई दाहिने हाथ की हथेली को $\vec{A}$ और $\vec{B}$ के तल के लम्बवत इस प्रकार रखों की अंगूलियां सदिष $\vec{A}$ और के तल के लम्बवत् इस प्रकार रखों कि अंगूलियां सदिश $\vec{A}$ के अनुदिश हो और जब अंगूलियां हथेली की तरफ मूड़े या बंद हो तो वह $\vec{B}$ की तरफ जायें तो अंगूठे की दिशा ही $\hat{n}$ की दिशा होगी। जहाँ $\hat{n} = \vec{A}\times\vec{B}$ की दिशा में इकाई सदिश है



गुणधर्म :

☞ दो सदिशों का सदिश गुणनफल एक सदिश होता है और दोनों सदिशों के तल के लम्बवत् होता है अर्थात् दोनों सदिशों $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के लम्बवत् होता है। चाहे सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ लम्बवत् हो या न हो।

☞ सदिश गुणन क्रम विनिमय नियम का पालन नहीं करता है

अर्थात् $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$

परन्तु $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{B}\times\vec{A}| = AB\sin\theta$

☞ सदिश गुणन वितरित होता है। जब सदिशों का क्रम निश्चित हो अर्थात्

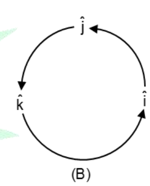
$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$

☞ जब $\sin\theta$ = अधिकतम = 1, अर्थात्, $\theta = 90°$ हो तो दो सदिशों का सदिश गुणनफल अधिकतम होगा।

$|\vec{A}\times\vec{B}|_{max} = AB$

अर्थात् यदि सदिश लम्ब कोणीय हो तो उनका सदिश गुणनफल अधिकतम होता है।

☞ जब $|\sin\theta|$ = न्यूनतम = 0, अर्थात् $\theta = 0°$ या $180°$ हो तो दोंनो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल न्यूनतम होगा। $[\vec{A}\times\vec{B}]_{\text{न्यूनतम}} = 0$ अर्थात् यदि दो अशून्य सदिशों का सदिश गुणनफल शून्य है तो सदिश संरेखीय होते है।

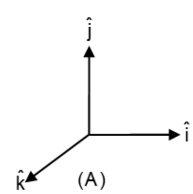


☞ $\vec{A}\times\vec{A} = AA\sin 0°\ \hat{n} = \vec{0}$.

☞ $\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$

☞ $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}\quad \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}\quad \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$

☞ घटकों के पदों में,



$$= \vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} - \hat{j}\begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} + \hat{k}\begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}$$

$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{j}\,(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$

SPOT LIGHT

☞ यदि एक समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाएं सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ द्वारा प्रदर्शित की जाये तो समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का परिमाण $|\vec{A}\times\vec{B}|$ होगा।

☞ यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण हो तब उसका क्षेत्रफल होगा $\frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$

☞ यदि $\vec{A}$ तथा $\vec{B}$ एक त्रिभुज की आसन्न भुजाऐं हो तब त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}|$

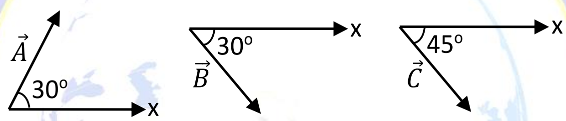
SOLVED EXAMPLES

Example: 37 दो कण A तथा B, क्रमशः सरल रेखाओं x+2y +3 = 0 तथा 2x + y –3 = 0 गतिशील है। जिस समय पर यह मिलते हैं उसका स्थिति सदिश होगा

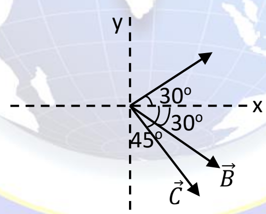
(1) $3\hat{i}-3\hat{j}$ (2) $2\hat{i}-2\hat{j}$ (3) $\hat{i}+\hat{j}$ (4) $\hat{i}-\hat{j}$

Solution: कण रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु पर मिलते हैं। हल करने पर x = 3, y = –3 अतः मिलने वाले बिंदु का स्थिति सदिश $3\hat{i}-3\hat{j}$ होगा।

Example: 38 तीन सदिश $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ चित्र में प्रदर्शित है तो निम्न के मध्य कोण बताइये। (i) $\vec{A}$ और $\vec{B}$, (ii) $\vec{B}$ और $\vec{C}$, (iii) $\vec{A}$ और $\vec{C}$.



Solution: दो सदिशों के बीच कोण ज्ञात करने के लिए हम दोनों सदिशों की पूंछो को जोड़ते है। इसके लिए $\vec{B}$ को समान्तर इस प्रकार स्थानान्तरित करते है कि $\vec{A}.\vec{B}$ और $\vec{C}$ पूंछे चित्रानुसार मिल जाय।



इस प्रकार हम आसानी से देख सकते है कि $\vec{A}$ और $\vec{B}$ के बीच कोण 60°, $\vec{B}$ के मध्य $\vec{C}$ के मध्य 15° तथा $\vec{A}$ और $\vec{C}$ के बीच कोण 75° है।

Example: 39 पूर्व दिशा के अनुदिश एकांक सदिश $\hat{i}$ है। 10^5 डाइन बल पश्चिम दिशा मे कार्यरत है। बल को $\hat{i}$ के पदों में व्यक्त करो।

(1) $10^5\hat{i}$ (2) $-10^5\hat{i}$ (3) $10^{-5}\hat{i}$ (4) $-10^{-5}\hat{i}$

Solution: $\vec{F} = -10^5\ \hat{i}$ dynes

Example: 40 एक सदिश ज्ञात करो जिसकी दिशा (–2, 4, 2) के अनुदिश हो परन्तु लम्बाई 6 हो।

(1) $\sqrt{6}(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ (2) $\sqrt{6}(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

(3) $\sqrt{6}(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})$ (4) $\sqrt{6}(-\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$

Solution: दिशा सदिश = $\frac{-2\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}}{2\sqrt{6}}$ तब

सदिश = $6\times\frac{-2\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}}{2\sqrt{6}} = \sqrt{6}\ (-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Example: 41 एक भौतिक राशि (m = 3 kg) को सदिश $\vec{a}$ के गुणन के रूप में $\vec{F} = m\vec{a}$ के अनुसार दिया जाता है तो $\vec{F}$ का परिमाण व दिशा ज्ञात करो यदि

(i) $\vec{a}$ = 3 m/s^2 पूर्व दिशा में (ii) $\vec{a}$ = –4 m/s^2 उत्तर दिशा में

Solution: (i) $\vec{F} = m\vec{a} = 3 \times 3\ ms^{-2}$ पूर्व दिशा में = 9 N पूर्व दिशा में

(ii) $\vec{F} = m\vec{a} = 3 \times (-4)$ N उत्तर दिशा में = –12N उत्तर दिशा में = 12 N दक्षिण दिशा में

Example: 42 $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ सदिश का योग ज्ञात कीजिये।

(1) $6\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ (2) $6\hat{i} + \hat{j}$ (3) $-6\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ (4) $6\hat{i} + \hat{k}$

Solution: $\vec{A} + \vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k} + 4\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k} = 6\hat{i} + \hat{j}$

Example: 43 समान परिमाण F_0 वाले दो सदिशों का परिणामी ज्ञात करो। यदि इनके बीच कोण θ है।

(1) $2F_0 \sin\frac{\theta}{2}$ (2) $2F_0 \cos\frac{\theta}{2}$ (3) $\frac{F_0}{2}$ (4) $F_0 \cos 2\theta$

Solution: $F^2_{Resultant} = F_0^2 + F_0^2 + 2F_0^2 \cos\theta$

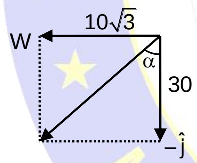
$= 2F_0^2\ (1 + \cos\theta) = 2F_0^2\ (1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1) = 2F_0^2 \times 2\cos^2\frac{\theta}{2}$

$F_{resultant} = 2F_0 \cos\frac{\theta}{2}$

Example: 44 किसी निश्चित दिन, वर्षा 30 m/sec से ऊर्ध्वाधर गिर रही है। कुछ समय पश्चात् वायु पश्चिम की ओर $10\sqrt{3}$ m/sec चाल से बहना प्रारंभ होती है। ऊर्ध्वाधर से वर्षा की दिशा व वर्षा की परिणामी चाल ज्ञात कीजिऐ।

(1) $10\sqrt{3}$ (2) $10\sqrt{2}$ (3) $20\sqrt{3}$ (4) $5\sqrt{3}$

Solution:



$\tan\alpha = \frac{10\sqrt{3}}{30} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\alpha = 30°$

छाता 30° कोण पर पकड़ना चाहिए

वर्षा की परिणामी चाल = = $\sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 30^2} = 20\sqrt{3}$

Example: 45 दो अशून्य सदिश $\vec{A}$ व $\vec{B}$ में सम्बन्ध | $\vec{A} + \vec{B}$ | = | $\vec{A} - \vec{B}$ | है। तो $\vec{A}$ व $\vec{B}$ के बीच कोण ज्ञात करो ?

Solution: $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$

$\Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

$\Rightarrow 4AB\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

Example: 46 यदि दो इकाई सदिशों का योग भी इकाई सदिश हो तो इनके अन्तर का परिमाण ज्ञात करो ?

Solution: माना $\hat{A}$ व $\hat{B}$ दो इकाई सदिश दिये गये है और इनका परिणामी $\hat{R}$ हो तो

(1) $\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{2}$ (3) $\sqrt{1}$ (4) $\sqrt{4}$

$|\hat{R}| = |\hat{A} + \hat{B}| \quad \Rightarrow 2\cos\frac{\theta}{2} = 1$

$|\vec{R}| = |\hat{A} - \hat{B}| \quad \Rightarrow |\vec{R}| = 2\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{3}$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Example: 47 सदिश $\vec{A}$, $\vec{B}$ और $\vec{C}$ के परिमाण क्रमषः $5, 5\sqrt{2}$ और 5 है। $\vec{A}$, $\vec{B}$ और $\vec{C}$ की दिषायें क्रमषः पूर्व, उत्तर–पूर्व और उत्तर की ओर है। यदि $\hat{i}$ और $\hat{j}$ क्रमशः पूर्व व उत्तर दिशा के अनुदिश एकांक सदिश हो तो $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ को $\hat{i}$, $\hat{j}$ के पदों में व्यक्त करो तथा परिणामी सदिष का परिमाण व दिशा भी बताओ ?

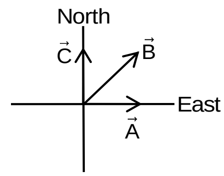
Solution: $\vec{A} = 5\,\hat{i}$, $\vec{C} = 5\,\hat{j}$

$\vec{B} = 5\sqrt{2}\cos 45\,\hat{i} + 5\sqrt{2}\sin 45\,\hat{j} = 5\,\hat{i} + 5\,\hat{j}$

$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 5\,\hat{i} + 5\,\hat{i} + 5\,\hat{j} + 5\,\hat{j} = 10\,\hat{i} + 10\,\hat{j}$

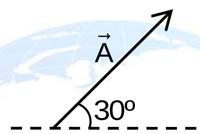
$|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2} = 10\sqrt{2}$

$\tan\theta = \dfrac{10}{10} = 1 \Rightarrow \theta = 45°$ (पूर्व से)



Example: 48 एक सदिश क्षैतिज से 30° का कोण बनाता है। यदि सदिश का क्षैतिज घटक 250 हो तो सदिश का परिमाण व उर्ध्वाधर घटक ज्ञात करो ?

(1) $\dfrac{250}{\sqrt{2}}$ (2) $\dfrac{250}{\sqrt{4}}$ (3) $\dfrac{150}{\sqrt{3}}$ (4) $\dfrac{200}{\sqrt{3}}$

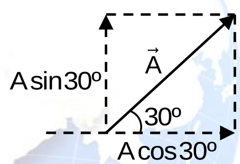


Solution: माना सदिश $\vec{A}$ है

$A_x = A\cos 30^0 = \dfrac{A\sqrt{3}}{2} = 250$

$\Rightarrow \quad A = \dfrac{500}{\sqrt{3}}$

$A_y = A\sin 30^0 = \dfrac{500}{\sqrt{3}} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{250}{\sqrt{3}}$



Example: 49 $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ है। जब एक सदिश $\vec{B}$ को सदिश में जोड़ा जाता है तो x-अक्ष के अनुदिश एकांक सदिश प्राप्त होता है। सदिश $\vec{B}$ ज्ञात करो तथा इसका परिमाण भी बताओ ?

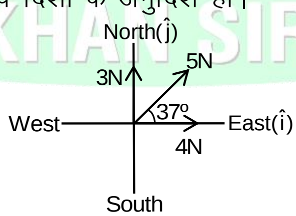
Solution: $\vec{A} + \vec{B} = \hat{i}$

$\vec{B} = \hat{i} - \vec{A} = \hat{i} - (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})$

$= -2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\Rightarrow |\vec{B}| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = \sqrt{13}$

Example: 50 प्रदर्शित स्थिति के लिये, न्यूनतम बल (न्यूटन में) का परिमाण क्या होगा कि बल को किसी भी दिशा में आरोपित कर सके ताकि परिणामी बल पूर्व दिशा के अनुदिश हो।



(1) 3N (2) 6N (3) 12N (4) 1.5N

Solution: माना बल F है, अतः पूर्व दिशा में परिणामी बल

$4\hat{i} + 3\hat{j} + (5\cos 37°\,\hat{i} + 5\sin 37°\,\hat{j}) + \vec{F} = k\hat{i}$

$\Rightarrow 4\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{i} + 3\hat{j} + \vec{F} = k\hat{i} \Rightarrow 8\hat{i} + 6\hat{j} + \vec{F} = k\hat{i} \Rightarrow \vec{F} = (k-8)\hat{i} - 6\hat{j} \Rightarrow F = \sqrt{(k-8)^2 + (6)^2}$

बल के न्यूनतम होने के लिए, $(K - 8) = 0 \Rightarrow F_{min} = 6$ N

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Example: 51 $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ज्ञात कीजिए यदि $\vec{A}=3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$ तथा $\vec{B}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$.

(1) 14 (2) 12 (3) 16 (4) 18

Solution: $\vec{A}\cdot\vec{B} = (3\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}).(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}) = 6 + 12 - 2 = 16$

Example: 52 यदि सदिश $\vec{P} = a\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{Q} = a\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ एक दूसरे के लम्बवत है, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

(1) – 1, 3 (2) 1, 5 (3) – 2, 3 (4) 2, 3

Solution: यदि $\vec{P}$ व $\vec{Q}$ लम्बवत् है।

$\Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{Q} = 0$

$\Rightarrow (a\hat{i} + a\hat{j} + 3\hat{k}) . (a\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}) = 0$

$\Rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0$

$\Rightarrow a^2 - 3a + a - 3 = 0$

$\Rightarrow a(a - 3) + 1(a - 3) = 0$

$\Rightarrow a = -1, 3$

Example: 53 $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ तथा $\vec{B} = 12\hat{i} + 5\hat{j}$ के मध्य कोण ज्ञात कीजिए।

Solution: यहाँ $\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{(3\hat{i}+4\hat{j})\cdot(12\hat{i}+5\hat{j})}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{12^2+5^2}}$

$\cos\theta = \frac{36+20}{5\times13} = \frac{56}{65} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{56}{65}$

Example: 54 यदि $\vec{A} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ और $\vec{B} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ हो तो $\vec{A}\times\vec{B}$ ज्ञात करो।

Solution: $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-4-(-4)) - \hat{j}(2-12) + \hat{k}(-1-(-6))$

$= 10\hat{j} + 5\hat{k}$

KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR

QUICK FOLLOW UP

गणितीय उपकरण व सदिष

द्विपद सन्निकटन

- $(1+x)^n \approx 1+nx$; यदि x <<<

द्विघात समीकरण

यदि $ax^2+bx+c = 0$......(i)

- $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
- $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}$

श्रेणी

A.P.

- $a_n = a+(n-1)d$
- $S_n = \dfrac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$

G.P.

- $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}$
- $S_n = \dfrac{n}{2}$
- $S_\infty = \dfrac{1}{1-r}$ sum of ∞

त्रिकोणमिति

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
- $1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$
- $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$
- $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
  $= 1 - 2\sin^2\theta$
  $= 2\cos^2\theta - 1$

लामी प्रमेय

$\dfrac{A}{\sin\alpha} = \dfrac{\beta}{\sin\beta} = \dfrac{C}{\sin\gamma}$

अवकलन

- $\dfrac{d}{dx}(cx^n) = cnx^{n-1}$
- $\dfrac{d}{dx}(u \pm v) = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$
- $\dfrac{d}{dx}(uv) = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$
- $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$

समाकलन

- $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$,
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- क्षेत्र = $\int_a^b f(x)dx$

सदिष

- $|\vec{A}| = A$
- $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$
- $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}\right)$
- $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$
- $\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}\right]$
- $\vec{A}\cdot\vec{B} = [A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z]$
- $\vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{n}$
- $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\dfrac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}|$

अवकलन → उच्चिष्ठ / निम्निष्ठ

- निम्निष्ठ : $\dfrac{dy}{dx} = 0$ and $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$
- उच्चिष्ठ : $\dfrac{dy}{dx} = 0$ and $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

ANSWER KEY

TOPIC WISE QUESTIONS

Q.1 रेडियन का डिग्री में परिवर्तन
(i) 45° (ii) 150° (iii) 630° (iv) 108°
(v) 120° (vi) 135°

Q.2 डिग्री का रेडियन में परिवर्तन
(i) $8\pi/9$ (ii) $3\pi/4$ (iii) $5\pi/12$ (iv) $13\pi/36$
(v) $5\pi/4$ (vi) $25\pi/18$ (vii) $31\pi/18$

Q.3 (i) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (iv) $\frac{3}{4}$
(v) $\frac{3}{5}$ (vi) $\frac{3}{4}$ (vii) $\frac{4}{3}$ (viii) Zero

Q.4 (i) $-\sqrt{2}$ (ii) -1 (iii) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ (iv) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
(v) $-\frac{1}{2}$ (vi) 1 (vii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (viii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
(ix) 0

Q.5 (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (iv) $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$

Q.6 (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Q.7 (i) $\pm\frac{5}{13}$ (ii) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ (ii) $\frac{15}{17}$ (iv) 25

निकटतम मान

Q.8 (2)
Q.9 (1)
Q.10 (3)

अवकलन

Q.11 (i) $3x^2$ (ii) $\frac{-2}{x^3}$
(iii) $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ (iv) $2\sec^2 x$
(v) $\frac{dy}{dx} = 5\cos x$ (vi) $\frac{dy}{dx} = 2x + \cos x$
(vii) $\sec^2 x - \text{cosec}^2 x$
(viii) $\frac{dy}{dx} = e^x . \sin x + e^x \cos x$
(xi) $\sin x + x\cos x$ (x) $e^x \ln x + \frac{e^x}{x}$
(xi) $e^x(\tan x + \sec^2 x)$
(xii) $\frac{dy}{dx} = (2x + 3)(2x^4 - 5) + (x^2 + 3x - 2)(8x^3)$
(xiii) $\cos^2 x - \sin^2 x$
(xiv) $\frac{ds}{dt} = (t^2 + 1)(2t) + (t^2 - 1)2t = 4t^3$

Q.12 (i) $\sec^2 x$ (ii) $1 - \frac{1}{x^2}$
(iii) $\frac{x^2(\cos x) - \sin x(2x)}{x^4}$
(iv) $\frac{dy}{dx} = \frac{(2x+1)2x - x^2 \times 2}{(2x+1)^2} \Rightarrow \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$
(v) $\frac{dy}{dx} = \frac{x(-\sin x) - \cos x}{x^2}$
(vi) $2\cos 2x$ (vii) $\sin 2x$
(viii) $5\cos 5x$ (ix) $2a\cos(ax + b)$
(x) $10(2x + 1)^4$ (xi) $-27(4 - 3x)^8$
(xii) $y = -4\sin(6 - 8x)$ (xiii) $\frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 2}}$
(xiv) $\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$ (xv) $y = \frac{-(6x+1)}{(6x^2 + 2x + 3)^{3/2}}$
(xvi) $-\frac{7}{2(7x-2)^{3/2}}$ (xvii) $\frac{1}{2\sqrt{2x-4}}$

(xviii) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{16-(x-6)^2}}$

(xix) $\frac{e^{\frac{x-6}{4}}}{4}$

Q.13

(i) cos x, – sin x

(ii) 4θ, 4

(iii) $\frac{1}{x},-\frac{1}{x^2}$

(iv) $12x - 10 + 10x^{-3}$, $12 - 30x^{-4}$

(v) $-\frac{12}{\theta^2}+\frac{12}{\theta^4}-\frac{4}{\theta^5}$; $\frac{24}{\theta^3}-\frac{48}{\theta^5}+\frac{20}{\theta^6}$

(vi) cosx – sin x; – sin x – cos x

(vii) $\frac{1}{x}+e^x, -\frac{1}{x^2}+e^x$

Q.14 (i) –4 (ii) 2 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{16}$

Q.15 (i) –34 (ii) –1 (iii) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (ii) –3

MAXIMA & MINIMA

Q.16 अधिकतम मान = 1 at x = 0

Q.17 अधिकतम मान = 39 at x = 2, न्यूनतम मान = 38 at x = 3

Q.18 x पर अधिकतम होगा हैं = 0.25×10^{-1}

Q.19 अधिकतम मान = 10 at x = 2

समाकलन

Q.20 (i) (a) $x^2 + c$ (b) $\frac{x^3}{3}+c$

(c) $\frac{x^3}{3}-x^2+x+c$

(ii) (a) $-\frac{1}{x}+C$ (b) $-\frac{5}{2x^2}+c$

(c) $2x+\frac{5}{x}+c$

(iii) (a) $\sqrt{x^3}+c$ (b) $3\sqrt{x}+c$

(c) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+2\sqrt{x}+c$

(iv) (a) $x^{4/3}+c$ (b) $\frac{x^{2/3}}{2}+c$

(c) $\frac{3x^{4/3}}{4}+\frac{3x^{2/3}}{2}+c$

(v) $x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^6}{2}+C$ (vi) $\frac{x^4}{9}-\frac{7}{x}+\frac{x^2}{2}+C$

(vii) $\frac{x^9}{9}+9x+C$ (viii) $\frac{x^{-6}}{-6}+C$

(ix) $\frac{1}{3}\ell nx+c$ (x) $\frac{x}{5}+\frac{1}{x^2}+x^2+C$

(xi) $-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

(xii) $\frac{y^2}{3}+\frac{1}{2}\log_e y-\frac{y^4}{4}+3y+C$

Q.21 (i) – 3 cos x + c

(ii) $-\cos t - \sin t + \frac{t^4}{4}+t^3+4t+C$

(iii) $-\cos x-\frac{1}{x^2}-x^5-\frac{e^{-2x}}{2}+3x+C$

(iv) $-\frac{\cos 3x}{3}+C$

(v) $-21\cos\frac{\theta}{3}+C$ (vi) $\frac{3}{5}\sin 5\theta+c$

Q.22 (i) 15 (ii) $\frac{3\pi}{2}$ (iii) 21 (iv) 0

(v) e – 1 (vi) $\frac{3\pi^2}{2}$ (vii) $\frac{7}{3}$ (viii) 0

(ix) $-\frac{1}{2}\log 3$

क्षेत्रफल कि गणना

Q.23 (3) 32

Q.24 (2) 330 A

निर्देषांक ज्यामिती

Q.25 (i) (a) $x = 2$, (b) $y = 3$ (ii) (a) $x = 0$, (b) $y = 0$
(iii) (a) $x = -4$, (b) $y = 0$ (iv) (a) $x = 0$, (b) $y = b$

Q.26 (i) $y = x$ (ii) $y + x = 0$
(iii) $y = x + 2$ (iv) $y + x = 0$
(v) $y = 2x + b$ (vi) $y + 2x = 2a$

Q.27 (i) $y = 2x + 1$ (ii) $x + y = 3$

Q.28 (i) $y = 1$ (ii) $x = 1$
(iii) $y = (-F_0/T)x + F_0$ (iv) $3y = x + 5$
(v) $3y = 2x + 14$

Q.29 (i) $y + x = 2$ (ii) $y = x + \sqrt{2}$
(iii) $y + = -3$

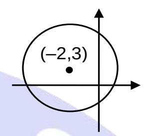
Q.30 (i) $m = 3, c = 5$ (ii) $m = -1, c = 2$
(iii) $m = \frac{1}{2}, c = -2$ (iv) $m = \frac{4}{3}, c = -4$
(v) $m = -\frac{4}{3}, c = 4$ (vi) $m = \frac{3}{2}, c = 3$

Q.31 (i) $2x + 3y = 6$ (ii) $y = x + 2$

Q.32 (i) 45° (ii) 150° (iii) 127°

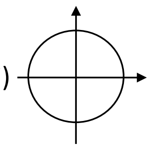
Q.33 (i) $y = \sqrt{3}x + (4 - \sqrt{3})$ (ii) $y + x + 2 = 0$
(iii) $x = -2$ (iv) $y = -2$

Q.34 (i)



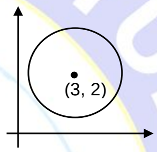
Center C(–2, 3), Radius r = 5

(ii)



Center C(0, 0), Radius r = 2

(iii)



Center C(3, 2), Radius r = 1

Que.	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Ans.	4	4	1	3	2	1	2	2	2	1	4	1	1	4	3
Que.	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**
Ans.	1	3	2	1	2	3	4	3	1	3	1	2	2	3	1
Que.	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**
Ans.	2	3	2	4	4	2	2	3	2	3	2	2	1	2	2
Que.	**80**	**81**	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**	**91**	**92**	**93**	**94**
Ans.	1	1	4	4	1	3	4	1	1	2	4	4	4	1	3
Que.	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**	**101**	**102**	**103**	**104**	**105**	**106**	**107**	**108**	**109**
Ans.	1	3	2	4	4	2	1	4	2	3	1	1	1	4	4
Que.	**110**	**111**	**112**	**113**	**114**	**115**	**116**	**117**	**118**						
Ans.	1	2	4	1	2	3	3	3	4						