Chapter 03

गतिकी (Kinematics)

CONTENT

1. गतिकी
2. दूरी और विस्थापन
3. चाल तथा वेग
4. त्वरण
5. नियत त्वरण से सरल रेखीय गति
6. आरेखीय भाग
7. गुरुत्व के अधीन गति (मुक्त रूप से गिरना)
8. सामान्यतः द्विविमीय गति
9. प्रक्षेप्य गति
10. धरातल से धरातल पर प्रक्षेपण
11. ऊँचाई से क्षैतिज प्रक्षेपण
12. निर्देश तंत्र
13. वर्षा–व्यक्ति सम्बधित प्रश्न
14. नदी–नाव (या व्यक्ति) प्रश्न

1. गतिकी (KINEMATICS):

गति के कारको (जैसे बल की प्रकृति) को उपयोग में न लेते हुए वस्तु की गति का अध्ययन ही गतिकी कहलाती हैं।

1.1 वस्तु: जिसका अध्ययन किया जाता है या केवल अध्ययन/अवलोकन के लिए चुने गए निकाय को वस्तु कहते हैं।

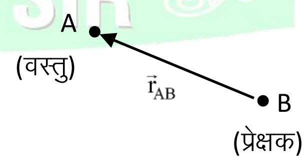
1.2 प्रेक्षक: जो अध्ययन करता है (दूरी, विस्थापन, गति, वेग, त्वरण या कुछ भी) या केवल जो भौतिक मात्रा में कुछ परिवर्तन को अनुभव करता है, उसे प्रेक्षक कहा जाता है।

उदाहरण: एक पक्षी चित्र के अनुसार उड़ रहा है और एक लड़का पक्षी की गति का अवलोकन कर रहा है तो पक्षी को प्रेक्षक (लड़के) के लिए वस्तु कहा जाता है और लड़के को वस्तु (पक्षी) के लिए प्रेक्षक कहा जाता है।

DETECTIVE MIND
वस्तु और प्रेक्षक दोनों सजीव या निर्जीव वस्तुएँ हो सकती हैं।

1.3 स्थिति सदिश $(\vec{r})$: यह एक सदिश राशि है जिसका प्रयोग प्रेक्षक के सापेक्ष किसी वस्तु की स्थिति दर्शाने के लिए किया जाता है।

बिंदु A (वस्तु) की स्थिति के सापेक्ष
बिंदु B (प्रेक्षक) को निम्नानुसार दर्शाया गया है।

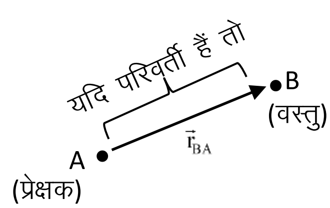


1.4 एक बिन्दु वस्तु की परिकल्पना: एक वस्तु की विमाऐं उसके द्वारा तय की गई दूरी की तुलना में बहुत कम (नगण्य आयतन) हो तो उस वस्तु को बिन्दु, वस्तु माना जाएगा।

1.5 विराम और गति:

यदि एक वस्तु समय के साथ अपनी स्थिति में परिवर्तन करती है तो वह गतिशील कहलाती है। गति हमेशा प्रेक्षक के सापेक्ष होती है।

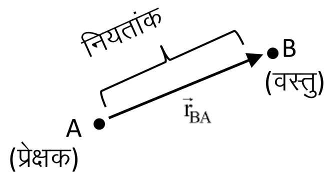
गति वस्तु तथा प्रेक्षक का सम्मिलित गुण है। प्रेक्षक के बिना गतिशील या स्थिर वस्तु का कोई अर्थ नहीं है कोई भी वस्तु परम स्थिर या परम गति में नहीं हो सकती।



KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

उदाहरण के लिए:

यदि $\frac{d\vec{r}_{BA}}{dt} = 0$ यदि $\vec{r}_{BA}$ समय के साथ परिवर्तित नहीं होता हैं तो 'B' को 'A' के लिए स्थिर कहा जाता है



और यदि $\frac{d(\vec{r}_{BA})}{dt} \neq 0$ तो $\vec{r}_{BA}$ समय के साथ परिवर्तन होता हैं तो 'B' को A के लिए गति में कहा जाता है।

- एक प्रेक्षक के संबंध में एक कण दूसरे प्रेक्षक के संबंध में गति में हो सकता है।
- एक प्रेक्षक के संबंध में गतिमान एक कण दूसरे प्रेक्षक के संबंध में स्थिर हो सकता है।

DETECTIVE MIND

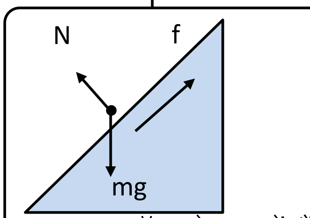
विराम और गति सापेक्ष शब्द हैं।

ब्रह्मांड में पूर्ण विराम या पूर्ण गति जैसा कुछ भी नहीं है।

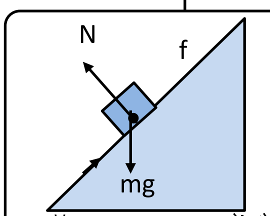
1.6 यांत्रिकी:

गति के प्राचलों (दूरी, विस्थापन, गति, वेग तथा त्वरण) के अध्ययन को यांत्रिकी कहते हैं।

- **यांत्रिकी**
  - **स्थैतिकी** — स्थिर अवस्था में किसी वस्तु का अध्ययन स्थैतिकी कहलाता है।
  - **गतिकी** — में किसी वस्तु कि गति का अध्ययन को गतिकी कहते हैं।
    - **गतिकी** — गति के कारण को छोडकर वस्तु की गति का अध्ययन गतिकी कहलाता है।
      - कण गतिकी — कण को एक वस्तु माना जाता है।
      - **ठोस वस्तु की गतिशीलता की गति** — एक वस्तु को अपने मूल स्वरूप में माना जाता है
    - गतिकी (गतिज) — गति में परिवर्तन के कारण सहित किसी वस्तु की गति का अध्ययन गतिज कहलाती है।
      - **कण गतिकी** — वस्तु को एक कण माना जाता है (NLM में चर्चा करेंगें)
      - **दृढ़ (ठोस) वस्तु की गतिशीलता** — वस्तु अपने मूलस्वरूप में मानी जाती है।



एक कण ब्लॉक के रूप में हैं

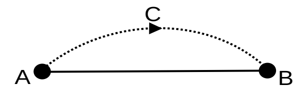


ब्लॉक मूल आकार में है।

कण की गति:

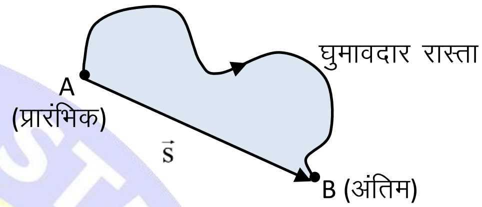
2. दूरी और विस्थापन (DISTANCE AND DISPLACEMENT):

2.1 तय दूरी :



- नियत समय अंतराल में, कण द्वारा तय की गई पथ की कुल लम्बाई, दूरी कहलाती है। माना एक वस्तु A से B की ओर C से होती हुई गति करती है। पथ ACB की लम्बाई वस्तु द्वारा तय की गई दूरी कहलाती है।
- चूंकि यह लंबाई है और ऋणात्मक लंबाई का कोई महत्व नहीं है, यह कभी भी ऋणात्मक नहीं है।
- यह एक अदिश राशि है।
- गति के दौरान यह कभी घटता नहीं है लेकिन यह नियत हो सकता है।
- इसका S.I. मात्रक मीटर हैं
- इसका CGS मात्रक सेंटीमीटर होता हैं
- विमा: $M^0L\,'T^0$

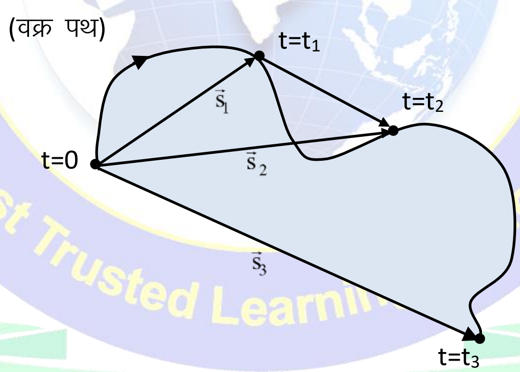
2.2 विस्थापन:



- यह प्रारम्भिक स्थिति के सापेक्ष अंतिम स्थिति का स्थिति सदिश है।
  उदाहरण के लिए: एक मक्खी बिंदु A से B की ओर उड़ रही है तो उसके विस्थापन को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है।
- यह एक सदिश राशि है। विस्थापन धनात्मक व ऋणात्मक दोनो हो सकता है।

DETECTIVE MIND

एक गति के लिए प्रारंभिक स्थिति अर्थात गति जहां से शुरू होती है वह एक होती है लेकिन अंतिम स्थिति की संख्या अनंत हो सकती है जैसा कि नीचे चित्र में दिखाया गया है।



- एक कण घुमावदार पथ पर घूम रहा है जैसा कि ऊपर चित्र में दर्शाया गया है। प्रेक्षक वस्तु की गति का प्रेक्षण $t = 0$ पर शुरू करता है जो प्रारंभिक स्थिति है लेकिन अलग–अलग समय पर इसकी अंतिम स्थिति अलग होती है।
  t पर कण की अंतिम स्थिति $t = t_1$ पर at $t = t_1$, (i.e. $\vec{s}_1$)
  t पर अंतिम स्थिति $t = t_2$ पर at $t = t_2$, (i.e. $\vec{s}_2$)
  और अंतिम स्थान पर $t = t_3$ पर at $t = t_3$, (i.e $\vec{s}_3$)

SPOT LIGHT

- समय, $t = 0$ वह समय नहीं है जहाँ से वस्तु गति शुरू करती है बल्कि यह वह समय है जहाँ से प्रेक्षक वस्तु की गति का अवलोकन करना शुरू करता है।

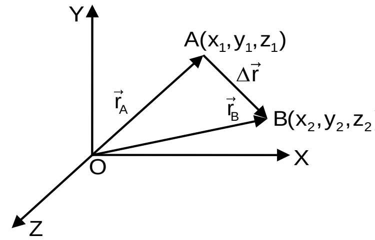
2.3 स्थिति सदिश के पदों में विस्थापन :

यदि कोई वस्तु $A(x_1, y_1, z_1)$ से $B(x_2, y_2, z_2)$ की ओर विस्थापित होती है, तो इसका विस्थापन सदिश $\vec{AB}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r}$

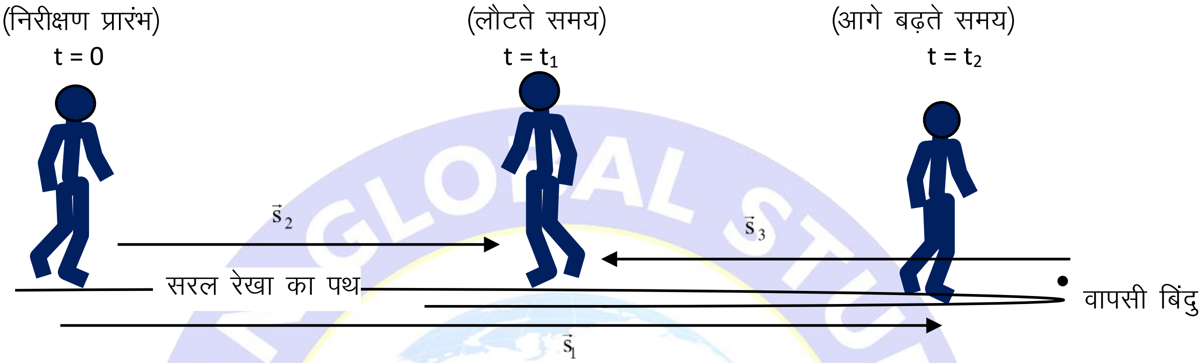
$\because \quad \vec{r}_B = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ and $\vec{r}_A = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$

$\therefore \quad \Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

यानी विस्थापन स्थिति सदिश में परिवर्तन के बराबर है।



2.4 विस्थापन सदिश को कैसे बनाये:



एक व्यक्ति एक सीधी रेखा के रास्ते पर चल रहा है और कुछ समय बाद वापस आ रहा है। आदमी की गति का अवलोकन समय $t = 0$ पर शुरू होता है। इसलिए, $t = t_1$ पर इसका विस्थापन सदिश $\vec{s}_2$ है लेकिन $\vec{S}_3$ नहीं हैं और समय $t = t_2$ पर विस्थापन $\vec{s}_1$ है।

- विस्थापन का परिमाण प्रारंभिक स्थिति और अंतिम स्थिति के बीच की दूरी के बराबर होता है।
- यदि गति की दिशा बदल जाती है तो विस्थापन का परिमाण कभी भी तय की गई दूरी से अधिक नहीं हो सकता है।
- यदि वस्तु सीधी रेखा के पथ पर चलती है और गति की दिशा को उलटती नहीं है। विस्थापन का परिमाण तय की गई दूरी के समान होगा।

SPOT LIGHT

- यदि कोई सदिश अपनी दिशा को यादृच्छिक रूप से बदलता है, तो इसे ग्राफ पर नहीं दर्शाया जा सकता क्योंकि ग्राफ पर इसकी दिशा को अलग नहीं किया जा सकता है। हालाँकि, यदि सदिश सीधी रेखा के साथ है तो इसे ग्राफ पर दिखाया जा सकता है क्योंकि इसकी दो अलग–अलग दिशाओं को ग्राफ पर धनात्मक और ऋणात्मक चिह्न के साथ पहचाना जा सकता है।

दूरी (s)	विस्थापन ($\vec{s}$)
यह एक अदिश राशि है	यह एक सदिश राशि है
यह अनुसरण किए गए पथ पर निर्भर करता है	यह केवल प्रारंभिक और अंतिम स्थिति पर निर्भर करता है
दूरी कभी भी ऋणात्मक और शून्य नहीं हो सकती है	यह ऋणात्मक, धनात्मक और शून्य हो सकता है
यह बढ़ सकता है या स्थिर रह सकता है लेकिन समय के साथ कभी कम नही हो सकता है	इसका परिमाण समय के साथ घट या बढ़ सकता है
दो निश्चित बिंदु के बीच अनंत दूरियां संभव हैं क्योंकि अनंत पथ दो निश्चित बिंदुओं के बीच संभव हैं।	दो निश्चित बिंदुओं के बीच विस्थापन का केवल एक मान संभव है।

DETECTIVE MIND

विस्थापन का परिमाण दूरी के बराबर या उससे कम हो सकता है लेकिन कभी भी दूरी से अधिक नहीं हो सकता।

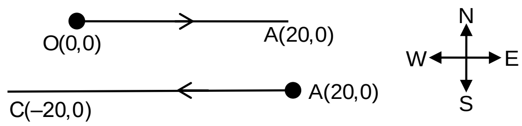
यानी $\text{दूरी} \geq |\text{विस्थापन}|$ & $\dfrac{\text{दूरी}}{\text{विस्थापन}} \geq 1$

SOLVED EXAMPLES

Example 1: एक कण मूल बिन्दु से प्रारम्भ होकर X-अक्ष के अनुदिश बिन्दु (20 m, 0) पर जाता है और फिर उसी रेखा के अनुदिश बिन्दु (–20 m, 0) पर लौट आता है। तो इस चक्कर में कण द्वारा तय की गई दूरी तथा विस्थापन ज्ञात किजिए।

(1) $20, -20\hat{i}$ (2) $60, -20\hat{i}$ (3) $40, -10\hat{i}$ (4) $40, -20\hat{i}$

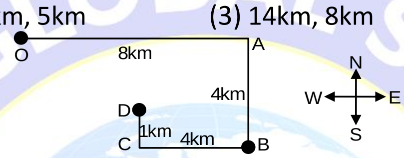
Solution: दूरी = $|\overline{OA}| + |\overline{AC}|$ = 20 + 40 = 60 m



$\Delta\vec{r}$ = विस्थापन = $\overline{OA} + \overline{AC} = 20\hat{i} = (-40\hat{i}) = (-20\hat{i})$

Example 2: चित्रानुसार एक कार O से D की ओर पथ पर OABCD के अनुदिश गति करती है तो तय की गई दूरी तथा कुल विस्थापन क्या होगा?

(1) 13km, 17km (2) 17km, 5km (3) 14km, 8km (4) 17km, शून्य



Solution: दूरी = $|\overline{OA}| + |\overline{AB}| + |\overline{BC}| + |\overline{CD}|$ = 8 + 4 + 4 + 1 = 17 km = विस्थापन = $\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$

= $8\hat{i} + (-4\hat{j}) + (-4\hat{i}) + \hat{j} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$

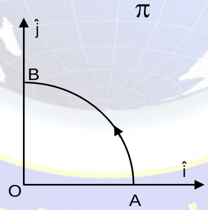
$\Rightarrow$ $|\Delta\vec{r}|$ = |विस्थापन| = $\sqrt{(4)^2 + (3)^2}$ = 5

अतः विस्थापन = 5 km, 37^0 S of E

Example 3: एक कण चित्र में दर्शाये अनुसार 10 मीटर त्रिज्या वाले वृत्त के चतुर्थांश पर A से B तक जाता है। पथ AB के अनुदिश विस्थापन व दूरी का परिमाण तथा विस्थापन सदिश व x- अक्ष के मध्य कोण ज्ञात करो?

(1) $10\sqrt{2}, 5\pi, 45°$ (2) $5\pi, 10\sqrt{2}, 30°$

(3) $10, 10\pi, 60°$ (4) $5\sqrt{2}, \frac{5}{\pi}, 45°$



Solution: विस्थापन = $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = 10\hat{j} - 10\hat{i}$

$|\vec{AB}| = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$ m

ΔOBA से $\tan\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{10}{10} = 1$

$\Rightarrow$ $\theta = 45°$

विस्थापन सदिश $\vec{OA}$ और x-अक्ष के मध्य कोण = 90° + 45° = 135°

पथ AB की दूरी = $\frac{1}{4}$ (परिधि)

= $\frac{1}{4}$ $(2\pi R)$ m = (5π) m

Example 4: एक वस्तु का प्रारम्भिक स्थिति सदिश $r_A = 2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ है तथा अंतिम स्थिति सदिश $r_B = 6\hat{i} + 9\hat{j} - 2\hat{k}$ है, तो स्थिति सदिश में परिवर्तन (विस्थापन) ज्ञात करो।

(1) $4\hat{i} + 8\hat{j} + 6\hat{k}$ (2) $2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$ (3) $4\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$ (4) $2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

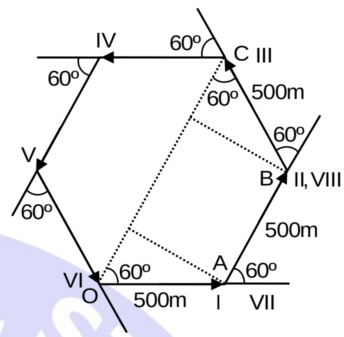
Solution: तब = $\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (6\hat{i} + 9\hat{j} - 2\hat{k}) - (2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}) = 4\hat{i} + 8\hat{j} - 6\hat{k}$

Example 5: एक खुले मैदान में मोटर साइकिल चालक एक ऐसे पथ के अनुदिश गमन करता है जो प्रत्येक 500 m के पश्चात 60° कोण से बायीं ओर घूमता है, तीसरे छठे व आठवें मोड पर चालक का विस्थापन ज्ञात कीजिये। प्रत्येक स्थिति के लिए चालक द्वारा तय किये गये कुल पथ से विस्थापन के परिमाण की तुलना किजिए।

Solution: तीसरे मोड़ पर

विस्थापन = $\vec{OA}+\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{OC}$ = 500 cos 60° + 500 + 500 cos 60° = O से C तक 1000 मीटर

दूरी = 500 + 500 + 500 = 1500 m



$\therefore \dfrac{\text{विस्थापन}}{\text{दूरी}} = \dfrac{1000}{1500} = \dfrac{2}{3}$

छठे मोड पर

$\because$ चूंकि प्रारम्भिक व अंतिम स्थितियाँ समान है,

विस्थापन = 0 तथा दूरी = 500 × 6 = 3000 m

$\therefore \dfrac{\text{विस्थापन}}{\text{दूरी}} = \dfrac{0}{3000} = 0$

आठवें मोड़ पर

विस्थापन = $2(500)\cos\left(\dfrac{60^\circ}{2}\right)$

= 1000 × cos 30°

= $1000 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 500\sqrt{3}$m

दूरी = 500 × 8 = 4000 m

$\therefore \dfrac{\text{विस्थापन}}{\text{दूरी}} = \dfrac{500\sqrt{3}}{4000} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$

Example 6: एक कण 'r' त्रिज्या के वृत्ताकार पथ पर एक परिक्रमण 40 s में पूर्ण करता है तो 2 min 20 s के पश्चात कण द्वारा तय की गई दूरी तथा विस्थापन ज्ञात कीजिये।

(1) $22r, \sqrt{2}r$ (2) $11r, 2\sqrt{2}r$ (3) 22r , zero (4) zero , zero

Solution: पथ की त्रिज्या = r

एक परिक्रमण के लिए आवर्तकाल = 40 sec

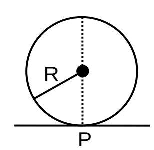
परिक्रमण की कुल संख्या = $\dfrac{140}{40} = \dfrac{7}{2}$

तय की गई दूरी = $2\pi r \times \dfrac{7}{2} = \dfrac{44}{7} \times r \times \dfrac{7}{2}$ = 22r

एक परिक्रमण में कण का विस्थापन शून्य है

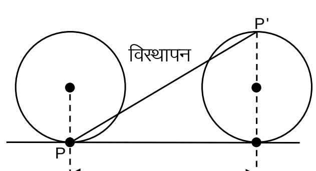
अतः कण का विस्थापन = 2r

Example 7: 'R' त्रिज्या का एक पहिया धरातल पर रखा है तथा इसका, सम्पर्क बिन्दु 'P' है। यदि पहिया बिना फिसले लुढ़कता हुआ आधा चक्कर पूर्ण करता है तो सम्पर्क बिन्दु P का विस्थापन ज्ञात कीजिये।



(1) $R\sqrt{\pi^2+2}$ (2) $2R$ (3) $R2\sqrt{2}$ (4) $R\sqrt{\pi^2+4}$

Solution:



विस्थापन = $\sqrt{(\pi R)^2+(2R)^2}$ = $R\sqrt{\pi^2+4}$

3. चाल तथा वेग (SPEED AND VELOCITY):

3.1 चाल: समय के साथ दूरी मे परिवर्तन की दर को चाल कहते हैं

- यह एक अदिश राशि है
- विमा $[M^0L^1T^{-1}]$
- S.I: मीटर/सेकंड
- C.G.S मात्रक: cm/s
- एक गतिमान कण की गति कभी भी ऋणात्मक या शून्य नहीं हो सकती है, यह हमेशा धनात्मक होती है।

3.2 एकसमान चाल:

एकसमान चाल जब कोई गतिमान कण समान समयान्तराल में समान दूरी तय करता है तो उसकी चाल एकसमान चाल कहलाती है।

$$\text{एकसमान चाल} = \frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$$

3.3 असमान चाल या परिवर्ती चाल:

- यदि कोई गतिमान कण समान समयान्तरालों में असमान दूरियाँ तय करती है तो उसकी चाल असमान या परिवर्ती चाल कहलाती है।

3.4 औसत चाल:

वस्तु द्वारा तय की गई दूरी और उसमें लगे कुल समय के अनुपात को औसत चाल कहते हैं।

$$\text{औसत चाल} = \frac{\text{तय की गई कुल दूरी}}{\text{दूरी तय करने में लगा समय}}$$

अर्थात् $\boxed{v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}}$

- यदि कण भिन्न–भिन्न एकसमान चाल $v_1, v_2, v_3 ....v_4$, से क्रमशः समयान्तरालों $t_1, t_2, t_3 ....t_n$ में गति करता है तो औसत चाल

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + ...v_n}{n} \text{ (चाल का समान्तर माध्य)}$$

- यदि कण भिन्न–भिन्न दूरियाँ $s_1, s_2, s_3....s_n$ को क्रमशः $v_1, v_2, v_3.......v_n$ चालों से तय करता है तो औसत चाल

$$v_{av} = \frac{n}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + ... + \frac{1}{v_n}} \text{ (चाल का हरात्मक माध्य)}$$

3.5 तात्क्षणिक चाल:

समय के विशेष क्षण पर कण की चाल तात्क्षणिक चाल कहलाती है।

$$\text{तात्क्षणिक चाल } v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

DETECTIVE MIND

तात्क्षणिक चाल को सामान्य रूप से गति कहा जाता है।

- यदि s तय की गई दूरी है और v तात्क्षणिक चाल है तो $v = \frac{ds}{dt}$ भी, ds = vdt

$\therefore$ $t = t_1$ to $t = t_2$ के दौरान तय की गई कुल दूरी, $\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v dt$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

DETECTIVE MIND

चूँकि तय की गई दूरी कभी घटती नहीं है इसलिए परिवर्तन की दर समय के सापेक्ष कभी भी ऋणात्मक नहीं होती है और इसलिए गति कभी भी ऋणात्मक नहीं होती है।

- एक कण पहले आधे समय के लिए गति v_1 के साथ और अगले आधे समय के लिए गति v_2 के साथ यात्रा करता है, तो इसकी औसत चाल $\frac{v_1 + v_2}{2}$ होगी–

3.6 वेग:

विस्थापन में समय के सापेक्ष परिवर्तन की दर वेग कहलाती है।

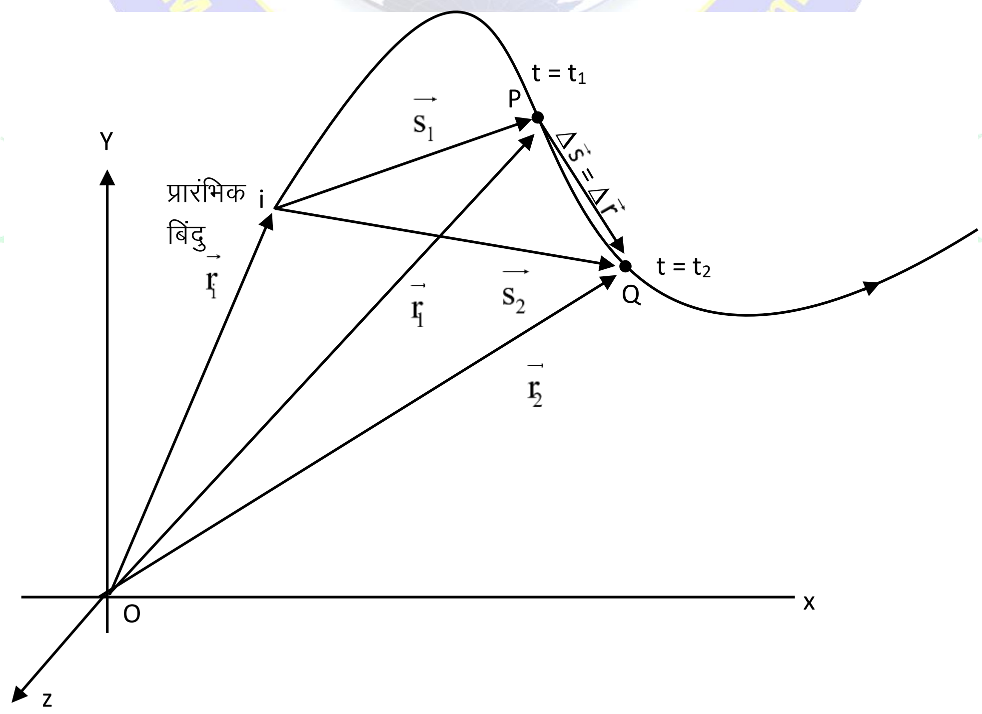
- वेग एक सदिश राशि है।
- विमा: $[M^0L^1T^{-1}]$
- S.I. मात्रक : मीटर/सैकण्ड
- C.G.S. मात्रक cm/s
- किसी वस्तु की गति उसके वेग से परिलक्षित होती है।

SPOT LIGHT

- विस्थापन और स्थिति दो अलग–अलग सदिष हैं लेकिन स्थिति सदिष में परिवर्तन और विस्थापन सदिष में परिवर्तन हमेशा समान होते हैं इसलिए समय के संबंध में उनकी दर (वेग) भी समान होती है।

सत्यापन:

एक कण जिसने वक्र पथ पर प्रारंभिक बिंदु 'i' से गति शुरू की है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है समय पर विस्थापन $t=t_1$ $\vec{s}_1$ है और समय t_2 पर विस्थापन $\vec{s}_2$ है और इसका संबंधित स्थिति $\vec{r}_1$ सदिश प्रारंभिक स्थिति 'i' है $t = t_1$ समय पर स्थिति सदिश $\vec{r}_1$ है और समय $t = t_2$ पर स्थिति सदिश $\vec{r}_2$ है



$\Delta\vec{s}_2$ = समय अंतराल $t = t_1$ से $t = t_2$ के बीच स्थिति सदिष में परिवर्तन

$\Delta\vec{r}_2$ = समय अंतराल $t = t_1$ से $t = t_2$ के बीच स्थिति सदिष में परिवर्तन

त्रिभुज OPQ में सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करना

$\vec{r}_1 + \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 \quad \Rightarrow \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

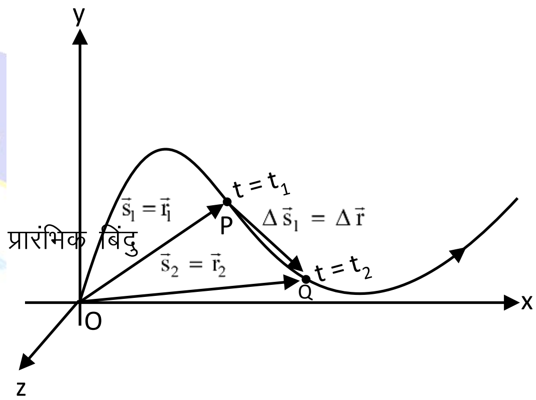
पुनः त्रिभुज iPQ में सदिश योग के त्रिभुज नियम का उपयोग करना

$\vec{s}_1 + \Delta\vec{s} = \vec{s}_2 \quad \Rightarrow \Delta\vec{s} = \vec{s}_2 - \vec{s}_1$

उपरोक्त आरेख में $\Delta\vec{s}$ और $\Delta\vec{r}$ त्रिभुज OPQ और iPQ में समान परिणामी सदिश

इसलिए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि स्थिति सदिष और विस्थापन सदिष अलग–अलग सदिष हैं यदि गति के शुरुआती बिंदु और स्थिति सदिष की उत्पत्ति अलग–अलग हैं लेकिन स्थिति सदिष $\Delta\vec{r}$ में परिवर्तन, हमेशा विस्थापन सदिश $\Delta\vec{s}$ में परिवर्तन के बराबर होता है,

अतः $\Delta\vec{r} = \Delta\vec{s}$



- यदि गति का प्रारंभिक बिंदु और स्थिति सदिश की उत्पत्ति संयोग (अर्थात समान हो जाती है) तो स्थिति सदिश और विस्थापन सदिश भी समान हो जाते हैं। अतः उपरोक्त आरेख में यदि $\vec{r}_i = 0$ तब

$\vec{s}_1 = \vec{r}_1$ & $\vec{s}_2 = \vec{r}_2$

इसलिए यह वेग को परिभाषित करता हैं

DETECTIVE MIND

समय के सापेक्ष विस्थापन या स्थिति सदिष में परिवर्तन कि दर वेग कहलाती हैं।

3.7 एकसमान वेग (नियत वेग):

जब कण के वेग का परिमाण तथा दिशा दोनों समय के साथ परिवर्तित ना हो तो उसका वेग एकसमान वेग कहलाता है। ऐसा केवल तभी सम्भव है जब कण एक सरल रेखा में बिना दिशा परिवर्तित किये गति करे।

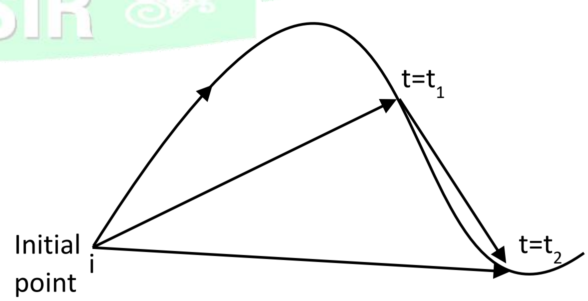
3.8 असमान वेग (परिवर्ति वेग):

जब वेग का परिमाण अथवा दिशा या दोनों समय के साथ परिवर्ती हो तो कण का वेग असमान वेग या परिवर्ती वेग कहलाता है।

3.9 औसत वेग:

गतिमान कण द्वारा तय किया गया कुल विस्थापन और उसमें लगे कुल समय के अनुपात को औसत वेग कहते हैं।

औसत वेग = $\frac{\text{कुल विस्थापन}}{\text{कुल समय}}$; $\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$



एक कण वक्र पथ पर गति कर रहा है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है जो प्रारंभिक बिंदु 'i' से गति शुरू कर रहा है समय $t = t_1$ पर इसका विस्थापन s_1 है और विस्थापन समय $t = t_2$ पर s_2 है तो समय अंतराल के दौरान इसका औसत वेग

$t = t_1$ से $t = t_2$ को साथ निर्देशित किया जाएगा $\Delta\vec{s}$ or $\Delta\vec{r}$

$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}_{av} \parallel \Delta\vec{s}$

3.10 तात्क्षणिक वेग:

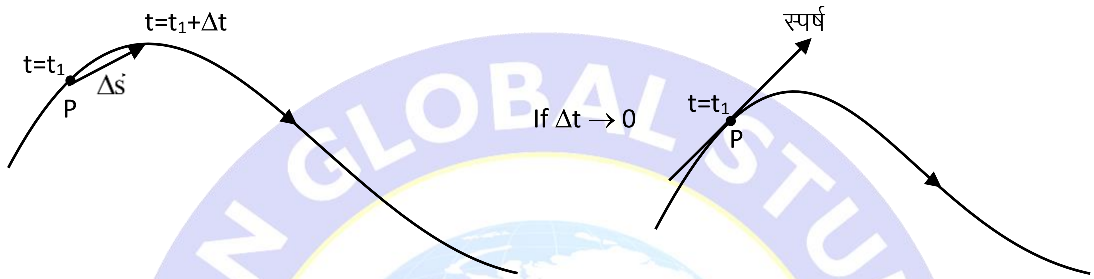
किसी समय के विशेष क्षण पर कण का वेग उसका तात्क्षणिक वेग कहलाता है।

DETECTIVE MIND

तात्क्षणिक वेग को केवल वेग कहा जाता है।

तात्क्षणिक वेग $\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

तात्क्षणिक वेग हमेशा कण द्वारा अनुसरण किए जाने वाले पथ पर स्पर्शरेखा के साथ निर्देशित होता है।



- अब $\Delta\vec{s}$ समय अंतराल के लिए $t = t_1$ से $t = t_1 + \Delta t$ इतना छोटा होगा कि यह समय $t = t_1$ पर कण की (बिंदु P) स्थिति पर पथ के स्पर्शरेखा के साथ होगा।
- 1–D गति के लिए धनात्मक और ऋणात्मक संकेतों का ध्यान रखा जा सकता है, $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है $\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$
- वेग का परिमाण चाल है अर्थात चाल $= |\vec{v}|$
- 1–D गति के लिए $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = v\,dt$. तो समय से कुल विस्थापन $t = t_1$ to $t = t_2$, $\boxed{\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt}$.
- 1–D गति के लिए यदि वस्तु अपनी गति की दिशा को उलट देती है तो वेग अपना संकेत बदल देता है और इसे निश्चित समय पर शून्य होना चाहिए।

- यदि गति 1–D (अर्थात् वक्र पथ की गति) नहीं है तो उत्क्रमण बिंदु पर कण का वेग शून्य हो भी सकता है और नहीं भी। उदाहरण के लिए एक वृत्ताकार पथ पर गति।
- 1–D गति में, यदि वेग समय के कार्य के रूप में दिया जाता है, $v = f(t)$ तो समय के कार्य के रूप में कुल विस्थापन, $s = f(t)$ $v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow ds = f(t)\,dt$ होगा।

  इसके दौरान कुल विस्थापन $t = t_1$ to $t = t_2$

  $\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt \Rightarrow \boxed{s_2 - s_1 = \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt}$
- वेग धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

- यदि वेग समय के साथ लगातार बदल रहा है अर्थात वेग समय का फलन है तो समय औसत वेग $<\vec{v}_{av}>_t = \frac{\int \vec{v}\,dt}{\int dt}$
- यदि दूरी के साथ वेग लगातार बदल रहा है अर्थात वेग अंतरिक्ष (दूरी) का फलन है तो अंतरिक्ष औसत वेग - $<\vec{v}_{av}>_x = \frac{\int \vec{v}\,dx}{\int dx}$
- औसत गति $\geq$ | औसत वेग | & $\frac{\text{औसत चाल}}{\text{औसत वेग}} \geq 1$
- जब कोई कण किसी पथ पर गति कर रहा होता है, तात्क्षणिक वेग का परिमाण तात्क्षणिक वेग के बराबर होता है।
- एक कण की गति स्थिर हो सकती है लेकिन वेग परिवर्तनशील हो सकता है।
  उदाहरण: जब कोई कण एकसमान वृत्तीय गति कर रहा होता है तो उसकी वृत्तीय गति के प्रत्येक क्षण के लिए उसकी गति स्थिर रहती है लेकिन वेग हर क्षण बदलता रहता है।
- जब कण एकसमान वेग से गति करता है तो उसकी तात्क्षणिक चाल, तात्क्षणिक वेग का परिमाण, औसत चाल और औसत वेग का परिमाण सभी समान होते हैं।
  $v = |\vec{v}| = v_{av} = |\vec{v}_{av}|$

SOLVED EXAMPLES

Example 8: यदि एक वस्तु $v = t^3 + 2t$ के वेग से गति कर रही है, तो 1 व 2 सेकण्ड के मध्य औसत वेग ज्ञात करो।

(1) $\frac{9}{2}\,m/s$ (2) $\frac{27}{4}\,m/s$ (3) $\frac{12}{5}\,m/s$ (4) शून्य

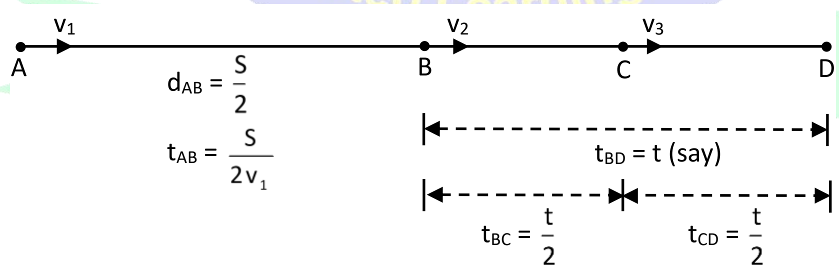
Solution: As $< v_{av} >$ (औसत वेग) $= \frac{\int v\,dt}{\int dx} = \frac{\int v\,dt}{\int dt} = \frac{\int_1^2 (t^3+2t)dt}{\int_1^2 (dt)} = \frac{27}{4}\,m/s$

Example 9: एक कण गति v_1 के साथ कुल दूरी का पहला आधा भाग तय करता है। शेष यात्रा के लिए यह पहले आधे समय में v_2 की गति से और शेष आधे समय में v_3 की गति से चलती है। पूरी यात्रा के दौरान कण की औसत गति ज्ञात किजिए?

(1) $\frac{2v_1(v_2+v_3)}{2v_1+v_2+v_3}$ (2) $\frac{v_1+v_2+v_3}{3}$

(3) $\frac{2v_1v_2v_3}{v_1+v_2+v_3}$ (4) $\frac{3v_1(v_2v_3)}{v_1+v_2+v_3}$

Solution:



$\Rightarrow d_{BD} = \frac{S}{2}$ $\Rightarrow v_2 t_{BC} + v_3 t_{CD} = \frac{S}{2}$ $\Rightarrow v_2\frac{t}{2} + v_3\frac{t}{2} = \frac{S}{2}$

$\Rightarrow v_2 t + v_3 t = S$ $\Rightarrow t = \frac{S}{v_2+v_3}$

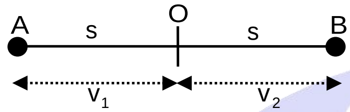
औसत चाल $= \frac{S}{\frac{S}{2v_1} + \frac{S}{v_2+v_3}} = \frac{2v_1(v_2+v_3)}{2v_1+v_2+v_3}$

Example 10: यदि एक कण प्रथम आधी दूरी v_1 चाल से और द्वितीय आधी दूरी v_2 चाल से तय करता है, तो इस यात्रा में कण की औसत चाल ज्ञात कीजिये।

(1) $\frac{v_1 + v_2}{2}$ (2) $\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$

(3) $\frac{v_1v_2}{v_1 + v_2}$ (4) $\sqrt{v_1v_2}$

Solution: $v_{avg.} = \frac{s+s}{t_1+t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}} = \frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$



$t_1 = \frac{s}{v_1}$ $t_2 = \frac{s}{v_2}$

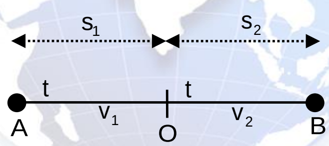
= v_1 व v_2 का हरात्मक माध्य (भिन्न चाल से तय की गई समान दूरियों के लिए)

Example 11: यदि एक कण प्रथम आधे समय अन्तराल में v_1 चाल से और द्वितीय आधे समय अन्तराल में v_2 चाल से गति करता है तो यात्रा के दौरान इसकी औसत चाल बताइए।

(1) $\frac{v_1 + v_2}{2}$ (2) $\frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$

(3) $\frac{v_1v_2}{v_1 + v_2}$ (4) $\sqrt{v_1v_2}$

Solution: $v_{avg} = \frac{s_1+s_2}{t+t} = \frac{(v_1+v_2)t}{2t} = \frac{v_1+v_2}{2}$ = का समान्तर माध्य (समान समय में तय की गई दूरी के लिए)



Example 12: एक कार पहले मिनट में 2.24 km h^{-1} वेग से, दूसरे मिनट में 3.60 km h^{-1} तथा तीसरे मिनट में 5.18 km h^{-1} वेग से गति करती है। इन तीन मिनट में औसत वेग की गणना कीजिये।

(1) 1.33 km/h (2) 2.25 km/h (3) 3.67 km/h (4) शून्य

Solution: औसत वेग = $\frac{2.24+3.60+5.18}{3}$

= 3.67 kmh^{-1} (समान समय में तय की गई दूरी)

Example 13: एक पक्षी 20 m/s वेग से 15 सैकण्ड तक उत्तर दिशा में उड़ता है, वह 5 सैकण्ड के लिए रूकता है, तत्पश्चात 10 सैकण्ड तक 24 m/s वेग से दक्षिण दिशा में उड़ता है। पूरी उड़ान के दौरान औसत चाल व औसत वेग का परिणाम ज्ञात किजिए।

(1) 18 m/s, 3 m/s (2) 12 m/s, 4 m/s (3) 9 m/s, 2 m/s (4) 18 m/s, 2 m/s

Solution: औसत चाल = $\frac{\text{कुल दूरी}}{\text{कुल समय}} = \frac{20\times15+24\times10}{15+5+10} = \frac{540}{30}$ = 18 ms^{-1}

औसत वेग= $\frac{\text{विस्थापन}}{\text{कुल समय}} = \frac{60\hat{j}}{30} = 2\hat{j}$

औसत वेग का परिमाण = $|2\hat{j}|$ = 2 m/s

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Example 14: सरल रेखा में गतिशील कण का विस्थापन निम्न द्वारा दिया जाता है $s = 4t^2 + 5t - 6$ यहां s सेमी में तथा t सैकण्ड में है तो ज्ञात किजिए :

(i) कण की प्रारम्भिक चाल (ii) t = 4s पर चाल

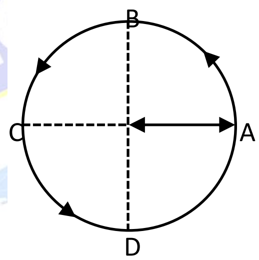
(1) 5 cm/s, 37 cm/s (2) 8 cm/s, 22 cm/s (3) 5 cm/s, 28 cm/s (4) 8 cm/s, शून्य

Solution: (i) चाल (v) = $\frac{ds}{dt} = 8t + 5$

प्रारम्भिक चाल (अर्थात t = 0 पर), v = 5 cm/s

(ii) t = 4s पर, $v = 8(4) + 5 \Rightarrow 37$ cm/s

Example 15: जैसा कि चित्र में दिखाया गया है, एक साइकिल चालक समय t में A से D तक एक वृत्ताकार ट्रैक पर चलता है। साइकिल चालक की औसत गति और औसत वेग क्या है?



(1) $\frac{2\pi r}{t}, \frac{r\sqrt{2}}{t}$ (2) $\frac{3\pi r}{t}, \frac{r}{\sqrt{2}t}$ (3) $\frac{2\pi r}{t}, \frac{2\sqrt{2}r}{t}$ (4) $\frac{3\pi r}{2t}, \frac{r\sqrt{2}}{t}$

Solution: t समय में तय की गई दूरी = ABCD = $\frac{3\pi r}{2}$

औसत चाल = $\frac{3\pi r/2}{t} = \frac{3\pi r}{2t}$

t समय में विस्थापन = AD = $\sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$

औसत वेग = $\frac{r\sqrt{2}}{t}$

Example 16: पिंड एक ही दिशा में वेग v_1 के साथ s_1 और v_2 के साथ s_2 की दूरी तय करता है। पिंड के औसत वेग की गणना करें।

(1) $\frac{(s_1+s_2)v_1 v_2}{s_1 v_2 + s_2 v_1}$ (2) $\frac{(s_1+s_2)v_1 v_2}{s_2 v_2 + s_1 v_1}$ (3) $\frac{s_2 v_2 + s_1 v_1}{(s_1+s_2)v_1 v_2}$ (4) $\frac{s_1 v_2 + s_2 v_1}{(s_1+s_2)v_1 v_2}$

Solution: दूरी (s_1) के लिए लिया गया समय $t_1 = s_1/v_1$

दूरी (s_2) के लिए लिया गया समय $t_2 = s_2/v_2$

कुल तय की गई दूरी = $s_1 + s_2$;

कुल समय = $t_1 + t_2$

∴ औसत वेग

= $\frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \frac{s_1+s_2}{(s_1/v_1)+(s_2/s_2)}$

= $\frac{(s_1+s_2)v_1 v_2}{s_1 v_2 + s_2 v_1}$

4. त्वरण (ACCELERATION):

- वस्तु के वेग में परिवर्तन की दर को त्वरण कहते है।
- यह सदिश राशि है तथा इसकी दिशा वेग में परिवर्तन की दिशा के समान होती है (वेग की दिशा में नही)
- विमीय सूत्र $[M^0L^1T^{-2}]$
- मात्रक : मीटर / सेकण्ड ^{2}(S.I.), cm/s^2(C.G.S.)

4.1 एकसमान त्वरण

- जब त्वरण का परिमाण तथा दिशा दोनों नियत रहते है तो ऐसे त्वरण को एकसमान त्वरण कहते हैं।

4.2 असमान त्वरण

- जब त्वरण का परिमाण अथवा दिशा अथवा दोनों किसी अन्य भौतिक राशि के सापेक्ष परिवर्तित हो तो इसे परिवर्ती या असमान त्वरण कहते हैं।
- जब कोई कण एकसमान त्वरण से गतिमान हो तो उसका पथ सरल रेखा अथवा परवलयाकार हो सकता है।

4.3 औसत त्वरण

- औसत त्वरण कुल वेग में परिवर्तन तथा कुल समय का अनुपात होता है।

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$$

4.4 ताक्षणिक त्वरण

- समय के विशेष क्षण पर कण का त्वरण तात्क्षणिक त्वरण कहलाता है।

$$= \vec{a} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- वेग का प्रथम अवकलज या समय के सापेक्ष वेग में परिवर्तन की दर को तात्क्षणिक त्वरण कहते हैं।

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad \left[\text{As } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

- स्थिति सदिश का द्वितीय अवकलज तात्क्षणिक त्वरण कहलाता है।

DETECTIVE MIND

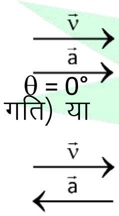
- यदि कोई कण विराम अवस्था से नियत त्वरण के अन्तर्गत गति प्रारम्भ करता है तो उसका पथ सरल रेखीय होता है।
- जब कोई कण परिवर्ती वेग से गतिमान हो तो उस पर आवश्यक रूप से त्वरण क्रियाशील होता है।
- जब कण सरल रेखा में एकसमान चाल से गतिमान हो तो त्वरण क्रियाशील नहीं होता है।
- जब कण वक्रीय पथ पर एकसमान चाल से गतिमान हो तो उस पर त्वरण क्रियाशील होता है। उदाहरण :– एकसमान वृत्तीय गति
- जब कण एकसमान वेग से गतिशील हो तो उसका पथ सरल रेखा होता है तथा त्वरण अनुपस्थित होता है।
- जब कोई कण परिवर्ती चाल से गतिमान हो तो उस पर आवश्यक रूप से त्वरण क्रियाशील होता है।
- औसत त्वरण सदिश की दिशा वेग में परिवर्तन सदिश की दिशा के समान होता हैं
- वेग का चिन्ह (+ve या –ve) कण की गति की दिशा को प्रदर्शित करता है जबकि त्वरण का चिन्ह केवल त्वरण की दिशा को प्रदर्शित करता है।
- यदि वेग तथा त्वरण के चिन्ह समान हो तो वेग का परिमाण बढता है अर्थात कण त्वरित होता है। जबकि चिन्ह विपरित हो तो वेग का परिमाण घटता है अर्थात कण में मन्दन होता है।
- विराम वह अवस्था है जब इसका वेग तथा त्वरण दोनों शून्य होते है।
- क्षणिक विराम वह अवस्था है जब कण अपनी दिशा परिवर्तित कर लेता है तथा वेग शून्य एवं त्वरण अशून्य होता है।

4.5 वेग में परिवर्तन (Velocity Change)

वेग में परिवर्तन

केवल चाल में परिवर्तन

$\vec{v}$ और $\vec{a}$ समान्तर अथवा प्रतिसमान्तर $\theta = 0°$ व $180°$



(त्वरित गति) या

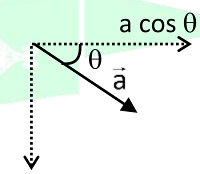
$\theta = 180°$

केवल दिशा में परिवर्तन

$\vec{v} \perp \vec{a}$ i.e. $\theta = 90°$

चाल व दिशा दोनों में परिवर्तन

θ $0°, 90°$, के अलावा कोई मान है $180°$
$\theta \in (0°, 90°) \rightarrow$ त्वरित दिशा
$\theta \in (90°, 180°) \rightarrow$ मंद दिशा परिवर्तन $\vec{v}$



- $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}$ or $\frac{dv}{dt} = a \Rightarrow dv = adt \Rightarrow \boxed{\int_u^v dv = \int_0^t adt}$ ← हमेशा लागू होता है या तो स्थिर या परिवर्तनशील होता है

$\Rightarrow v - u = \int_0^t adt$

$\Rightarrow \int_u^v dv = a\int_0^t dt \Rightarrow v - u = at \Rightarrow \boxed{v = u + at}$ ← केवल तभी लागू होता है जब ˙ स्थिर हो

- $\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = v$ (1–D गति कि स्थिती में)

  $\Rightarrow \int ds = \int_0^t v dt \qquad \Rightarrow \int_0^s ds = \int_0^t (u + at)dt$

  $\Rightarrow \boxed{s = ut + \frac{1}{2}at^2}$ ← यदि a नियतांक है तो योग्य होगा।

- एक कण सीधी रेखा पथ पर चल रहा है जिसका प्रारंभिक वेग t = 0 पर है और समय t = t पर अंतिम वेग विस्थापन s करने के बाद v है,

  $\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a$ (v = 1–D गति में वेग)

  $\Rightarrow \frac{dv}{dt} \times \frac{ds}{ds} = a$ (यहाँ s 1–D गति में विस्थापन है)

  $\Rightarrow \frac{ds}{dt} \times \frac{dv}{ds} = a \Rightarrow \frac{dv}{ds} = a \Rightarrow \int_u^v vdv = \int_0^s ads \Rightarrow \boxed{\frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} = \int_0^s ads}$ या तो त्वरण हमेशा लागू होता है स्थिर या परिवर्तनशील

  $\Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} = \int_0^s ads$

  अगर a = स्थिर $\Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} = a\int_0^s ds \Rightarrow \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} = a_t s \Rightarrow \boxed{v^2 - u^2 = 2as}$

- एक कण द्वारा n वें सेकंड में 1–D गति में विस्थापन: (यदि a = स्थिर)

  $V = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \int dx = \int v\, dt$

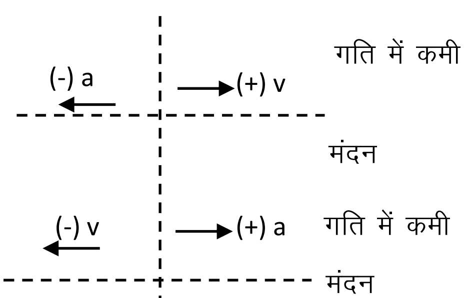
  $\Rightarrow \int_{s_{n-1}}^{s_n} dx \int_{t=n-1}^{t=n} (u + at)dt$

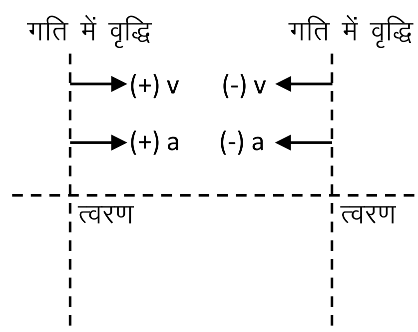
  $\Rightarrow S_n - S_{n-1} = u[n - n + 1] + \frac{1}{2} a[n^2 - (n-1)^2]$

  $\Rightarrow S_{n^{th}} = u + \frac{1}{2} a\,(n^2 - n^2 - 1 + 2n)$

  $\boxed{S_n^{th} = u + \frac{a}{2}(2n - 1)}$ ← केवल तभी लागू होता है जब 'a' स्थिर हो

- उपरोक्त समीकरण को लागू करने के लिए हम गति की रेखा के साथ दो संभावित दिशाओं में से किसी एक को धनात्मक और दूसरे को ऋणात्मक मानते हैं। ज्ञात पैरामीटर का उपयोग उचित संकेतों के साथ किया जाता है जबकि अज्ञात पैरामीटर के संकेत का अनुमान लगाकर उपयोग नहीं करना चाहिए।
- वेग का चिह्न (+ve या –ve) गति की दिशा को दर्शाता है लेकिन त्वरण का चिह्न त्वरण की दिशा को दर्शाता है।
- यदि वेग और त्वरण दोनों के चिन्ह समान हैं, तो वेग का परिमाण (अर्थात् गति) बढ़ रहा है और यदि दोनों के विपरीत चिन्ह हैं, तो वेग का परिमाण (अर्थात गति) घट रहा है।





KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

➢ परिवर्तित त्वरण के प्रश्नों को कैसे हल करें

(i) यदि त्वरण को वेग के फलन के रूप में दिया जाता है, अर्थात $a = f(v)$ तो कार्य समय के रूप में वेग b होगा

$$a = \frac{dv}{dt} \text{ and } a = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{dt} = f(v)$$

$\Rightarrow dv = f(v)dt \Rightarrow \int_u^v dv = \int_{t_1}^{t_2} dt$, जहाँ u, t_1 समय पर व v, t_2 पर वेग हैं

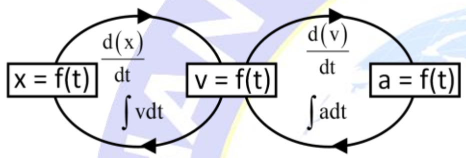
(ii) यदि दिए गए त्वरण का विस्थापन का फलन, $a = f(s)$ तो फलन के वेग का विस्थापन होगा

$$a = \frac{vdv}{ds} \text{ and } a = f(s)$$

$\Rightarrow \frac{vdv}{ds} = f(s) \Rightarrow \int_u^v vdv = \int_{s_1}^{s_2} f(s)ds$, जहाँ s, विस्थापन s_1 पर वेग हैं व s_2 विस्थापन पर v वेग हैं

DETECTIVE MIND

➢ जब $V = f(x) \Rightarrow \boxed{a = v\frac{dv}{dx}}$ व $V = f(t) \Rightarrow \boxed{a = \frac{dv}{dt}}$

➢ 

5. नियत त्वरण से सरल रेखीय गति (MOTION IN STRAIGHT LINE WITH CONSTANT ACCELERATION)

गति के समीकरण तभी उचित जब त्वरण नियत हो

➢ $v = u + at$ ➢ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ ➢ $v^2 - u^2 = 2as$

➢ $s = v_{av}\, t = \frac{(u+v)}{2}t$ ➢ $s = vt - \frac{1}{2}at^2$ ➢ $s_n - s_{n-1} = s_n^{th} = u + \frac{1}{2}a(2n-1)$

➢ इन सभी समीकरणों का उपयोग द्विविमीय गति में सदिश रूप में किया जा सकता है।

5.1 विरामावस्था में आने से पूर्व तय की गई दूरी तथा विरामावस्था में आने में लगा समय:

➢ u वेग से गतिमान कोई पिण्ड मंदन आरोपित करने पर s दूरी तय करके रूक जाता है। यदि समान पिण्ड nu वेग से गतिमान हो तो समान मंदन आरोपित करने पर वह n^2s दूरी तय करके रूकेगा।

As $v^2 = u^2 - 2as \Rightarrow 0 = u^2 - 2as \Rightarrow s = \frac{u^2}{2a}$ $s \propto u^2$ [a नियत है]

अतः u को n गुना करने पर s, n^2 गुना हो जाता है।

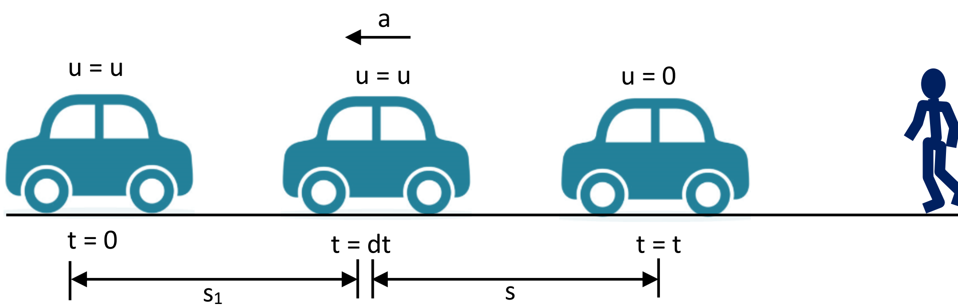
➢ विरामावस्था में आने में लगा समय (Stopping time) : $v = u - at \Rightarrow 0 = u - at \Rightarrow t = \frac{u}{a} \Rightarrow t \propto u$ [a नियत है]

अतः u को n गुना करने पर t, n गुना हो जाता है।

5.2 प्रतिक्रिया समय (Reaction Time):

यह प्रेक्षण व निष्पादन (execution) के मध्य का समय है।

➢ प्रतिक्रिया समय के दौरान वस्तु नियत वेग से गति करती है।



यहाँ
t = 0 → अवलोकन का समय
t = dt → ब्रेक लगाने का समय (समय की प्रतिक्रिया)
t = t → कार आराम से आती है
s → रोकने की दूरी

SOLVED EXAMPLES

Example 17: $\vec{v} = t\hat{i} + t^2\hat{j}$ दिया गया है चाल में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(1) $\frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ (2) $\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ (3) $\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}$ (4) $\frac{\sqrt{1+t^2}}{1+2t^2}$

Solution: $\vec{v} = t\hat{i} + t^2\hat{j}$ = $|\vec{v}| = \sqrt{t^2+t^4} = t\sqrt{1+t^2}$

चाल परिवर्तन की दर = $\frac{d(\vec{v})}{dt} = \sqrt{1+t^2} \times 1 + \frac{1}{2}(1+t^2)^{-1/2} \times 2t^2 = \sqrt{1+t^2} + \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1+2t^2}{\sqrt{1+t^2}}$

Example 18: एक कण का वेग $v = (2t^2 - 4t + 3)$ m/s है, जहाँ t सेकण्ड में समय है। इस कण का t = 2 सेकण्ड पर त्वरण ज्ञात करो।

(1) 8 m/s^2 (2) 4 m/s^2 (3) 2 m/s^2 (4) शून्य

Solution: त्वरण (a) = $\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 - 4t + 3) = 4t - 4$

अतः t = 2s पर त्वरण a = (4 x 2) – 4 = 4 m/s^2

Example 19: (i) यदि $s = 2t^3 + 3t^2 + 2t + 8$ तो वह समय ज्ञात कीजिए जब त्वरण शून्य होता है।

(1) t = 1 s (2) t = 0.5 s
(3) t = 4 s (4) त्वरण शून्य नहीं हो सकता

(ii) कण (t = 0 से प्रारंभ) का वेग समय के साथ v = 4t के अनुसार परिवर्तित होता है। t = 2 से t = 4 s के मध्य कण के विस्थापन की गणना कीजिए।

(1) 12 m (2) 24 m (3) 36 m (4) शून्य

Solution: (i) $V = \frac{ds}{dt} = 6t^2 + 6t + 2$

$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = 12t + 6 = 0$

$\Rightarrow t = -\frac{1}{2}$ जो कि असंभव है

इसलिए, त्वरण कभी भी शून्य नही हो सकता।

(ii) $\therefore \frac{ds}{dt} = v \quad \therefore s = \int v\,dt = \int_2^4 4t\,dt = \left[2t^2\right]_2^4$

$= 2(4)^2 - 2(2)^2 = 32 - 8 = 24$ m

Example 20: धनात्मक x अक्ष की दिशा में गतिशील कण का वेग $v = a\sqrt{x}$ के अनुसार परिवर्तित होता है, जहाँ a एक धनात्मक नियतांक है। मान लीजिये कि t = 0 पर कण की स्थिति x = 0 है। ज्ञात कीजिये -

(i) कण के वेग तथा त्वरण की समय पर निर्भरता

(1) $v \propto t^2 ; a \propto t$ (2) $v \propto t ; a \propto t^0$ (3) $v \propto t^0 ; a \propto t^0$ (4) $v \propto t^{1/2} ; a \propto t^{-1/2}$

(ii) कण द्वारा पथ के प्रथम s मीटर दूरी तय करने में लगे समय में कण का औसत वेग।

(1) $a\sqrt{s}$ (2) $a\frac{\sqrt{s}}{2}$ (3) $a\frac{\sqrt{s}}{4}$ (4) $a\frac{\sqrt{s}}{3}$

Solution: (i) $V = a\sqrt{x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a\sqrt{x} \Rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x}} = a\int_0^t dt$

$\Rightarrow x = \frac{a^2t^2}{4}$

वेग $v = \frac{dx}{dt} = \frac{2a^2t}{4} = \frac{1}{2}a^2t$

त्वरण (a) = $\frac{dv}{dt} = \frac{a^2}{2}$

(ii) प्रथम s दूरी तय करने में लगा समय

$x = \frac{a^2t^2}{4} \Rightarrow s = \frac{a^2t^2}{4}$ $\Rightarrow t = \sqrt{\frac{4s}{a^2}}$ $\Rightarrow v_{av} = \frac{s}{t} = \frac{s}{\sqrt{\frac{4s}{a^2}}} = \frac{a\sqrt{s}}{2}$

Example 21: एक वस्तु $2\hat{i} + 3t^2\hat{j}$ के वेग से गति कर रही है। तब 2 सेकण्ड पश्चात इसका औसत त्वरण ज्ञात किजिए।

(1) $6\hat{i} + 6\hat{j}$ (2) $3\hat{i}$ (3) $6\hat{j}$ (4) $-6\hat{i} + 6\hat{j}$

Solution: As $<\vec{a}>$ (औसत त्वरण)

$<\vec{a}> = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\text{वेग मे परिवर्तन}}{\text{समय अंतराल}}$

$\vec{v}_{\text{प्रारम्भिक}} = 2\hat{i} + 0\hat{j}$, $\vec{v}_{\text{अंतिम}} = 2\hat{i} + 12\hat{j}$

इसलिए, = $\Delta\vec{v} = \vec{v}_{\text{अंतिम}} - \vec{v}_{\text{प्रारम्भिक}} = 0\hat{i} + 12\hat{j}$ $\Rightarrow <\vec{a}> = 0\hat{i} + 6\hat{j}$

Example 22: एक कण सरल रेखा OX के अनुदिश गतिशील है। किसी क्षण t (सेकण्ड मे) पर कण की O बिन्दु से दूरी x (मीटर में) का मान निम्न प्रकार है $x = 10 + 6t^2 - 2t^3$ कण विरामावस्था में आने से पूर्व कितनी दूरी तय करेगा।

(1) 4 m (2) 8 m (3) 16 m (4) 24 m

Solution: t = 0 पर x का प्रारम्भिक मान x_1 = 10m

वेग $v = \frac{dx}{dt} = 12t - 6t^2$

a = 12 – 12t

जब a = 0, t = 1

t = 1s पर x का अंतिम मान, x_2 = 10 + 6 – 2 = 14

तय दूरी = $x_2 - x_1$ = 14 – 10 = 4m

Example 23: दिया गया है $\vec{v} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ तथा $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j}$. तब चाल में परिवर्तन दर ज्ञात कीजिए।

(1) $\frac{2}{3}\ m/s^2$ (2) $\frac{4}{3}\ m/s^2$ (3) $\frac{7}{5}\ m/s^2$ (4) शून्य

Solution: $\vec{a}$ का $\vec{v}$ की दिशा में प्रक्षेप्य = चाल में परिवर्तन की दर = $\vec{a}\cdot\hat{v}$

$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}\ m/s^2$.

Example 24: एक कण 5 m त्रिज्या के वृत्ताकार मार्ग पर 5 m/s की नियत चाल से गतिमान है जब वह अर्द्ध चक्र पूर्ण करता है तो इसका औसत त्वरण ज्ञात कीजिये।

(1) $\frac{\pi}{5}\ m/s^2$ (2) $\frac{10}{\pi}\ m/s^2$ (3) $\frac{\pi}{10}\ m/s^2$ (4) शून्य

Solution: वेग में परिवर्तन = $2v\sin\frac{\theta}{2} = 2v\sin\frac{180}{2} = 10$ m/sec

इसके द्वारा लिया गया समय = $\frac{\pi r}{v} = \frac{\pi\times5}{5} = \pi$; $a_{avg} = \frac{10}{\pi}$

Example 25: दो कारें एक दौड़ प्रतियोगिता में विरामावस्था से सरल रेखा में क्रमशः 2m/s और 4m/s के वेग से गति प्रारम्भ करती है। उनके त्वरण क्रमशः $2m/s^2$ और $1m/s^2$ है। यदि वे दोनो समान समय में दौड़ पूरी करती है तो उनके द्वारा तय पथ की लम्बाई ज्ञात करें।

(1) 4 m (2) 8 m (3) 16 m (4) 24 m

Solution: माना दोनों कारे समान स्थिति पर समान समय t में पहुंचते है तब $s = ut + \frac{1}{2}at^2$

प्रथम कार के लिए : $\Rightarrow 4t + \frac{1}{2}(1)t^2$

द्वितीय कार के लिए: $2t + \frac{1}{2}(2)t^2$

उपरोक्त समीकरणों को बराबर रखने पर $4t = 2t + t^2$

$\Rightarrow$ t = 4 s

t का मान रखने पर

$s = 4(4) + (1)(4)^2 = 16 + 8 = 24$ m

Example 26: एक कण एकसमान त्वरण a से सरल रेखा में गतिशील है। कण का प्रारम्भिक वेग शून्य है। प्रथम 's' दूरी में कण का औसत वेग ज्ञात कीजिये।

(1) $\frac{as}{4}$ (2) $\sqrt{as}$ (3) $\sqrt{\frac{as}{2}}$ (4) $\sqrt{\frac{a}{2s}}$

Solution: $\because s = \frac{1}{2}at^2$ $\therefore \frac{s^2}{t^2} = \frac{1}{2}as$ औसत वेग = $\frac{s}{t} = \sqrt{\frac{as}{2}}$

Example 27: एक रेलगाड़ी 20 km/h की चाल से प्लेटफार्म की ओर जाती है तथा एक चिड़िया प्लेटफार्म पर एक खम्भे पर बैठी है। जब रेलगाड़ी, खम्भे से 2 km की दूरी पर होती है, तो उसे ब्रेक लगाकर एक समान मंदन उत्पन्न करते हैं और ठीक उसी समय चिड़िया 60 km/hr की चाल से रेल की ओर उडती है तथा ट्रेन के सबसे नजदीक सिरे को छूकर वापस खम्भे की तरफ आती है फिर यही प्रक्रिया अपनाती है, तो ट्रेन के रूकने से पहलें चिड़िया द्वारा तय की गई दूरी का मान ज्ञात कीजिये।

(1) 9 km (2) 12 km (3) 24 km (4) 64 km

Solution: ट्रेन के मंदन के लिये $v^2 = u^2 + 2as$

$\Rightarrow 0 = (20)^2 + 2(a)(2) \Rightarrow a = -100$ km/hr²

ट्रेन को रूकने में लगा समय $v = u + at$ $\Rightarrow$ $0 = 20 - 100t \Rightarrow t = \frac{1}{5}$ hr

चिड़िया के लिये, चाल speed = $\frac{\text{दूरी}}{\text{समय}}$ $\Rightarrow$ $s_B = v_B \times t = 60 \times \frac{1}{5} = 12$ km.

Example 28: एक ट्रेन विरामावस्था से प्रारम्भ होकर 2.0 m/s^2 के नियत त्वरण से आधा मिनट तक गति करती है। तब ट्रेन पर ब्रेक लगाने पर वह एक मिनट में विरामावस्था में आ जाती है।

(i) तब ट्रेन द्वारा प्राप्त अधिकतम चाल होगी :

(1) 24 m/s (2) 32 m/s (3) 60 m/s (4) 90 m/s

(ii) ट्रेन के द्वारा तय कि गई कुल दूरी होगी :

(1) 600 m (2) 900 m (3) 1200 m (4) 2700 m

(iii) अधिकतम चाल की आधी चाल पर ट्रेन की स्थिति होगी।

(1) 1250 m (2) 2250 m (3) 960 m (4) 3600 m

Solution: (i) अधिकतम चाल $\Rightarrow v = u + at$

$v = 2 \times 30 = 60$ m/sec

(ii) इस समय में तय की गई दूरी $s_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times (30)^2 = 900$ m

मंदन $\Rightarrow v = u - at \Rightarrow 60 = 60\,a \Rightarrow a = 1$

मंदन समय में तय की गई दूरी

$s_2 = 60 \times 60 - \frac{1}{2} 1 \times (60)^2$

$s_2 = 1800$ m

कुल दूरी = 900 + 1800 = 2700m = 2.7 km

(iii) ट्रेन की स्थिति जब चाल आधी हो

$\frac{v^2}{4} = 0 + 2 \times 2 \times x_1 \qquad \Rightarrow x_1 = 225\text{m}$

मंदन $\Rightarrow \frac{3v^2}{4} = 2 \times 1 \times x_2 \qquad \Rightarrow x_2 = 1350$

अतः आधी चाल पर दूरी = 1350 + 900 = 2250 m = 2.25 km

Example 29: एक चालक ब्रेक लगाने में 0.20 सेकण्ड का समय लेता है जब उसे आवश्यकता होती है। यदि वह कार को 54 km/h से चलाता है तथा ब्रेक 6.0 m/s^2 से मंदित करते है। कार द्वारा तय की गई दूरी ज्ञात करे। जब उसे ब्रेक लगाने की आवश्यकता होती है।

(1) 5.4 m (2) 18.6 m (3) 21.75 m (4) 32.5 m

Solution: प्रतिक्रिया समय = 0.20 sec $\Rightarrow$ वेग = 54 km/hr = 15 m/s

त्वरण = 6 m/sec^2

0.2 sec में तय की गई दूरी = $15 \times 0.2 = 3$ m

त्वरण के दौरान तय की गई दूरी।

$\Rightarrow 15^2 = 2 \times 6 \times X \Rightarrow x = 18.75$ m

कुल दूरी = 21.75 m

Example 30: एक गोली लकडी के तख्ते से गुजरने पर अपने प्रारम्भिक वेग का (1 – 1/n) भाग खो देती है तो तख्तों की वह न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिये जिनसे गुजरने पर गोली विरामावस्था में आ जाये।

(1) $\frac{1}{1+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$ (2) $\frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$ (3) $\frac{n}{1-\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}$ (4) $\frac{1}{1+\left(\frac{n+1}{n}\right)^2}$

Solution: गुटके की मोटाई = t

गोली का मंदन

$\Rightarrow \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 v^2 = v^2 - 2at$

$\Rightarrow a = \frac{v^2}{2t}\left(1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)$

आवश्यक गुटको की संख्या = α

तब $\Rightarrow 0 = v^2 - 2a(\alpha t) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$

Example 31: एक कार विरामावस्था से प्रारम्भ होकर 2 m/s^2 के नियत त्वरण से गति करती हुई प्रथम 100 मीटर t_1 समय में तय करती है तथा अगले 100 मीटर t_2 समय में तय करती है। तब t_1 तथा t_2 का अनुपात ज्ञात कीजिए।

(1) 1 : 3 (2) $1 : \sqrt{2}$ (3) $1 : \sqrt{2}-1$ (4) $1 : 2\sqrt{2}-1$

Solution: $a = 2\ m/sec^2$

1^{st} 100 m के लिए $\Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\times100}{2}} = 10$

$t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2\times100}{2}} = 10\sqrt{2}$

$t_2 = 10(\sqrt{2}-1) \Rightarrow t_1 : t_2 = 1 : (\sqrt{2}-1)$

Example 32: एक कार विरामावस्था से प्रारम्भ होकर 5 m/s^2 के नियत त्वरण से गति कर रही है। प्रथम 5 सेकण्ड में तय की गई दूरी x_1 तथा अगले 5 सेकण्ड में तय की गई x_2 तथा अगले 5 सेकण्ड में तय की गई दूरी x_3 है। तो $x_1 : x_2 : x_3$ होगा।

(1) 1 : 4 : 9 (2) 1 : 1 : 1 (3) 1 : 3 : 5 (4) 2 : 3 : 5

Solution: $a = 5\ m/sec^2$

$x_1 = \frac{1}{2}\times 5\times(5)^2 = \frac{125}{2}$

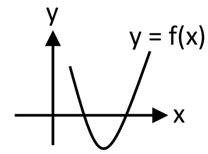
$x_2 = \frac{1}{2}\times 5 \times (10)^2 - x_1 = \frac{500}{2} - \frac{125}{2} = \frac{375}{2}$

$x_3 = \frac{1}{2}\times 5\times(15)^2 - x_1 - x_2 = \frac{625}{2}$

$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 3 : 5$

6. आरेखीय भाग (GRAPHICAL SECTION):

6.1 ग्राफ: दो चरों के बीच संबंध को दो तरह से व्यक्त किया जा सकता है

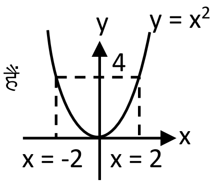


(i) बीजीय रूप से या समीकरण $y = f(x)$ द्वारा (ii) रेखांकन

उदाहरण: $y = x^2$ x ± 2 पर y का मान ज्ञात किजिए

हल: बीजिय विधि: $y_{x=\pm 2} = (\pm 2)^2 = 4$

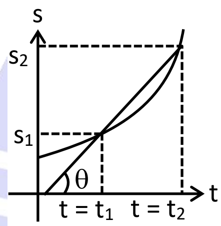
आरेखीय विधि: ग्राफ को देखने पर $x = \pm 2$ हो तो $y = 4$ प्राप्त होता हैं



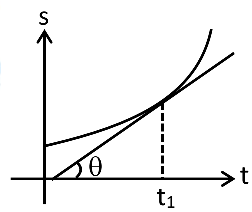
ग्राफ: दो चरों के बीच संबंध का ज्यामितीय निरूपण।

6.2 दूरी समय–ग्राफ:

➢ $t = t_1$ और $t = t_2$ पर दूरी – समय ग्राफ को मिलाने वाली सीधी रेखा का ढलान समय के संबंध में परिवर्तन की औसत दर देता है यानी समय अंतराल $t = t_1$ से $t = t_2$ के लिए गति और तय कि दूरी पर किसी भी बिंदु के स्पर्शरेखा का ढलान बनाम समय ग्राफ किसी भी बिंदु $t = t_1$ पर एक कण की तात्क्षणिक चाल देता है।



औसत गति $= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \tan\theta$

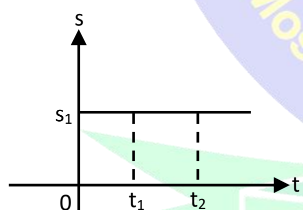


तात्क्षणिक गति $= \frac{ds}{dt} = \tan\theta$

➢ दूरी–समय ग्राफ के क्षेत्र का कोई भौतिक महत्व नहीं है।

➢ समय कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता।

(i)



As t→ बढ़ती है

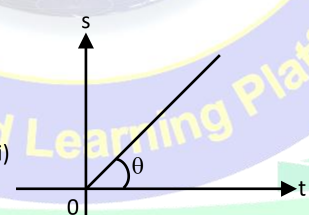
s → नियत

s-t ग्राफ का ढलान = 0

अत: चाल = 0

अत: कण स्थिर हैं

(ii)



t → बढेगा

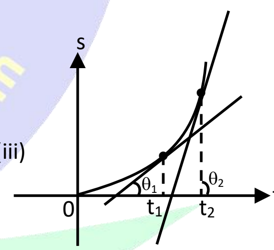
s → बढेगा

ढलान स्थिर हैं

अत: $\tan\theta =$ नियत

∴ चाल नियत हैं

(iii)



इसी तरह

t → बढेगा, s→बढेगा

ढलान$)_{at\ t_1}$ < ढलान$)_{at\ t_2}$

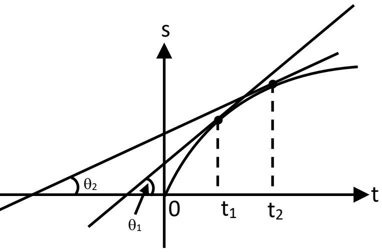
$\tan\theta_1)_{at\ t_1} < \tan\theta_2)_{at\ t_2}$

∴ चाल$)_{at\ t_1}$ < चाल$)_{at\ t_2}$

अत: चाल बढेगी

Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR

(iv)



इसी तरह

$t \rightarrow$ बढेगा, $s \rightarrow$ बढेगा

ढलान$)_{at\ t_1}$ > ढलान$)_{at\ t_1}$

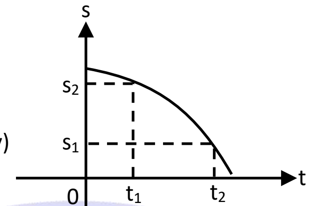
$\tan\theta_1)_{at\ t_1} > \tan\theta_2)_{at\ t_2}$

$\therefore$ चाल$)_{at\ t_1}$ > चाल$)_{at\ t_1}$

अतः ढलान घटेगा

अतः चाल कम होगी

(v)



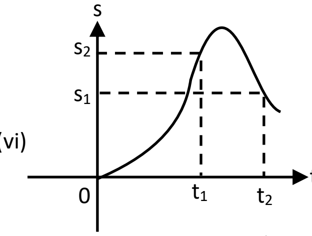
ग्राफ संभव नही हैं

इसी तरह

$t \rightarrow$ बढेगा

$s \rightarrow$ घटेगा

(vi)



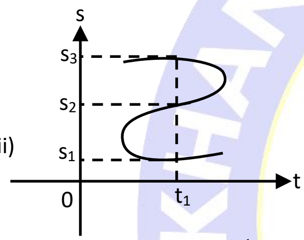
ग्राफ संभव नही हैं

इसी तरह

$t \rightarrow$ बढेगा

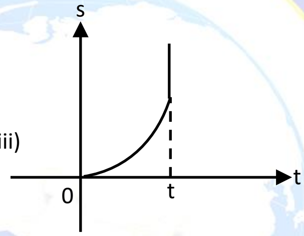
$s \rightarrow$ घटेगा

(vii)



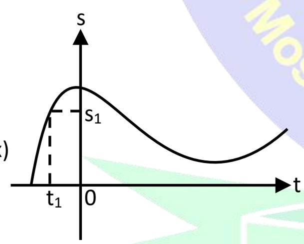
ग्राफ संभव नहीं है जब कण एक समय में तीन अलग जगह पर है

(viii)



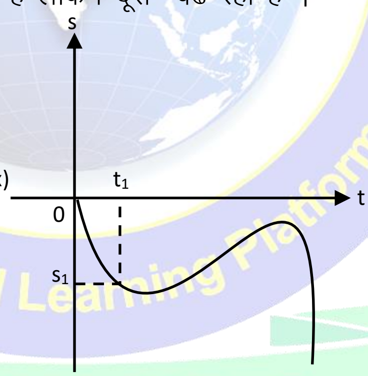
ग्राफ समय t के रूप में नियत संभव हो है लेकिन दूरी बढ रही है ।

(ix)



समय t ऋणात्मक हो तो ग्राफ नही हैं

(x)



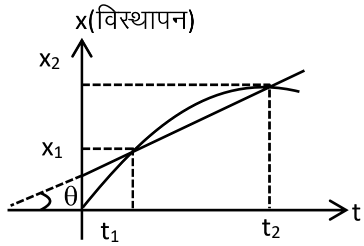
दूरी s ऋणात्मक के रूप में ग्राफ संभव नहीं है।

SPOT LIGHT

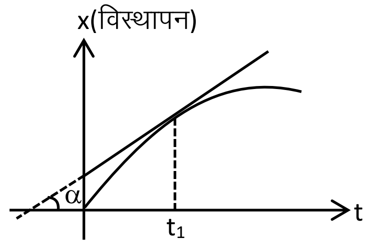
➢ दूरी समय ग्राफ को देखकर हम कणों द्वारा अनुसरण किए गए पथ के बारे में बता नहीं सकते हैं या हम पथ के बारे में यह नहीं बता सकते हैं कि यह सीधा रास्ता है या वक्र पथ है।

6.3 विस्थापन–समय ग्राफ:

- $t = t_1$ और $t = t_2$ पर विस्थापन – समय ग्राफ में शामिल होने वाली सीधी रेखा का ढलान समय के संबंध में परिवर्तन विस्थापन की औसत दर देता है अर्थात समय अंतराल $t = t_1$ से $t = t_2$ के लिए वेग और x के किसी भी बिंदु पर स्पर्शरेखा का ढलान – t वक्र किसी भी समय $t = t_1$ पर तात्क्षणिक वेग देता है

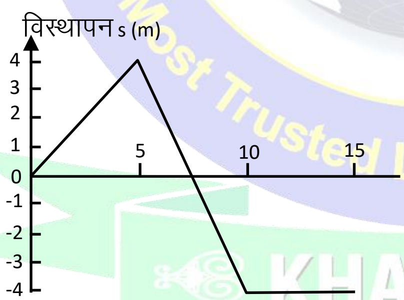


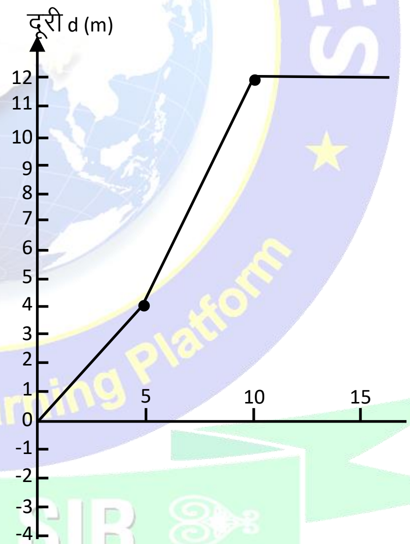
औसत वेग = $\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ = tan θ

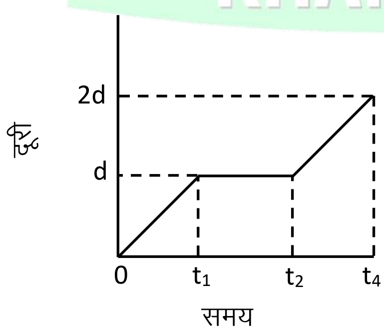


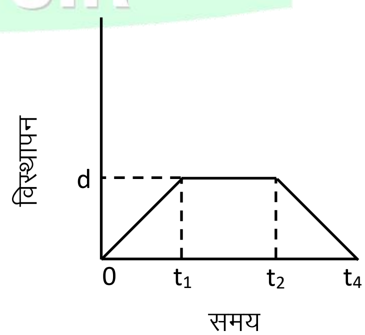
$t = t_1$ समय पर तात्क्षणिक वेग = $\frac{dx}{dt}$ = tan α

- x – t वक्र के किसी भी बिंदु पर स्पर्शरेखा के ढलान का परिमाण उस बिंदु पर तात्क्षणिक गति देता है।
- x – t वक्र के क्षेत्रफल का कोई भौतिक महत्व नहीं है
- X – t वक्र के ढलान के परिवर्तन की दर $\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}\right]$ किसी भी क्षण त्वरण का प्रतिनिधित्व करता है।
- विस्थापन–समय वक्र को दूरी–समय वक्र में बदलने के लिए, हम x –अक्ष के समानांतर एक काल्पनिक रेखा के बारे में ऋणात्मक ढलान के खंड की दर्पण छवि लेते हैं।

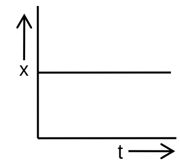




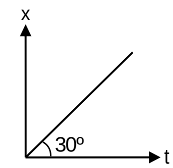




(i)
- x–t ग्राफ का ढलान शून्य है
- v = 0
- तो वस्तु विरामवस्था की स्थिति में है



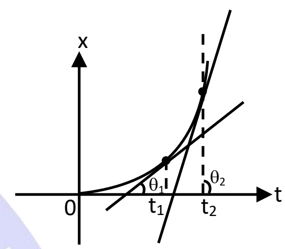
(ii)
- वक्र का ढाल स्थिर होता है
- = नियतांक = tan 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ इकाई, $\vec{a} = 0$.
- तो वस्तु निरंतर वेग और शून्य त्वरण के साथ चलता है।



(iii)
- वक्र के लिए
- t → बढेगा, x→ बढेगा
- प्रारंभिक ढलान शून्य है यानी u = 0
- ढलान धनात्मक है वेग = +ve
- ढलान का परिमाण)$_{at\ t_1}$ < ढलान का परिमाण)$_{at\ t_2}$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{at\ t_1} < \left|\frac{dx}{dt}\right|_{at\ t_1} \Rightarrow speed)_{at\ t_1} < speed)_{at\ t_2}$$

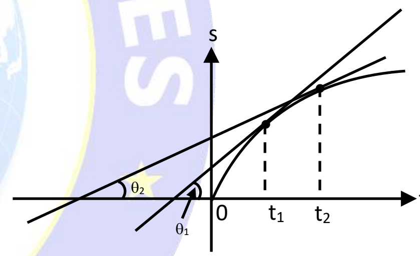
- चूँकि गति समय के साथ बढ़ रही है, इसका अर्थ है कि यह एक त्वरित गति है
- $\frac{d^2x}{dt^2}$ = त्वरण = +ve i.e. a = +ve
- तो वस्तु विरामवस्था से शुरू होता है और निरंतर त्वरण के साथ चलता है



(iv)
- वक्र के लिए
- प्रारंभिक ढलान + ve है अतः u = +ve
- ढलान पूरी तरह से + ve है यानी v = + ve हमेशा
- ढलान का परिमाण)$_{at\ t_1}$ ढलान का परिमाण)$_{at\ t_2}$

$$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{at\ t_1} > \left|\frac{dx}{dt}\right|_{at\ t_1} \Rightarrow speed)_{at\ t_1} > speed)_{at\ t_2}$$

- चूंकि, गति समय के साथ घट रही है, इसका मतलब है कि यह एक मंद गति है।
- $\frac{d^2x}{dt^2}$ = –ve i.e. a = –ve
- तो वस्तु एक निश्चित वेग से चलने लगता है तो मंद हो रहा है

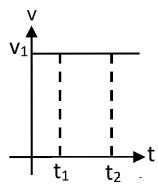


6.4 चाल–समय ग्राफ :

- चाल–समय ग्राफ का क्षेत्रफल तय की गई कुल दूरी दर्शाता है।
- v–t वक्र से औसत गति की गणना इस प्रकार की जा सकती है $v_{av} = \frac{\text{समय अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल}}{\text{समय –अन्तराल}}$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

(i)



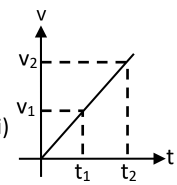
$t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ नियत

$t = t_1, v = v_1$

$t = t_2, v = v_1$

(ii)



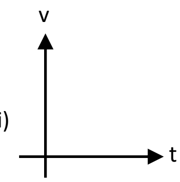
$t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ बढेगा

$t = t_1, v = v_1$

$t = t_2, v = v_2$

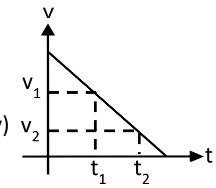
(iii)



$t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ शून्य

(iv)



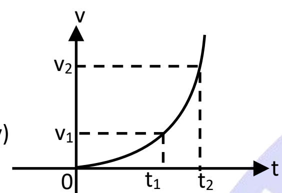
$t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ कम होगा

$t = t_1, v = v_1$

$t = t_2, v = v_1$

(v)

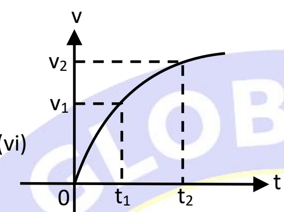


As $t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ बढेगा

$t = 0, v = 0$

(vi)

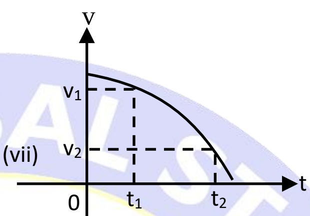


As $t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ बढेगा

$t = 0, v = 0$

(vii)

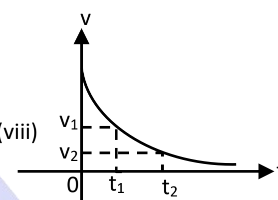


As $t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ बढेगा

$t = 0, v \neq 0$

(viii)



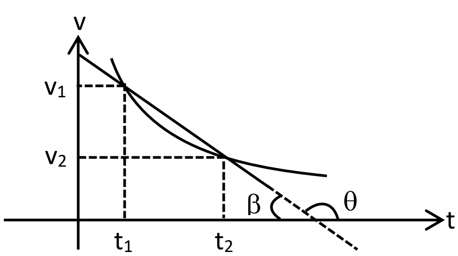
As $t \rightarrow$ बढेगा

$v \rightarrow$ बढेगा

$t = 0, v \neq 0$

6.5 वेग समय वक्र Velocity time graph:

➢ $t = t_1$ और $t = t_2$ पर वेग–समय ग्राफ में शामिल होने वाली सीधी रेखा का ढलान समय के संबंध में परिवर्तन वेग की औसत दर देता है यानी समय अंतराल के लिए त्वरण $t = t_1$ से $t = t_2$ और v–t ग्राफ के स्पर्शरेखा का ढलान तात्कालिक देता है त्वरण किसी भी समय $t = t_1$ उस बिंदु पर

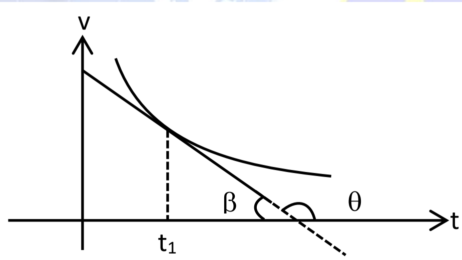


औसत त्वरण $= \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \tan\theta$

यहाँ औसत त्वरण ऋणात्मक है

θ अधिक कोण है इसलिए औसत का परिमाण

त्वरण $= \left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| = \left|\frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\right| = \tan\beta$



तात्क्षणिक त्वरण $= \frac{dv}{dt} = \tan\theta$

यहाँ तात्क्षणिक त्वरण ऋणात्मक होता है

θ अधिक कोण है इसलिए तात्क्षणिक का परिमाण

त्वरण पर $t = t_1 = \left|\frac{dv}{dt}\right| = \tan\beta$

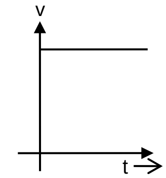
➢ v–t ग्राफ का क्षेत्रफल विस्थापन में परिवर्तन प्रदान करता है।

➢ v–t ग्राफ के परिमाण का क्षेत्र कुल दूरी तय करता है।

➢ v–t वक्र से औसत वेग की गणना इस प्रकार की जा सकती है $\vec{V}_{av} \frac{\text{समय अक्ष के साथ परिबद्ध क्षेत्रफल}}{\text{समय अन्तराल}}$

➢ v–t वक्र को गति–समय वक्र में बदलने के लिए, वक्र के ऋणात्मक भाग को धनात्मक बनाया जाता है क्योंकि गति ऋणात्मक नहीं हो सकती।

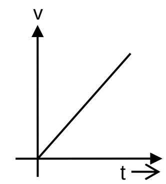
निम्न मानक v–t वक्र दर्शाता है :–



(i) वक्र की ढ़ाल शून्य होगी, अतः

$\vec{a} = 0$ व $\vec{v}$ = नियत

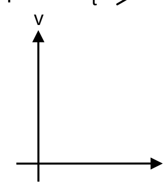
➢ तो वस्तु निरंतर वेग के साथ चलता है।



(ii) जब वक्र की प्रवणता धनात्मक हो

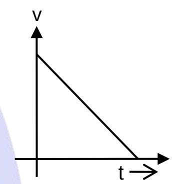
अर्थात = +ढाल भी नियत है अतः

• अतः वस्तु विरामावस्था से प्रारम्भ होकर नियत त्वरण में गति करेगी।



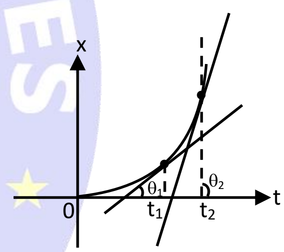
(iii) $v = 0, a = 0$

➢ अतः वस्तु विरामावस्था में रहेगी।



(iv) जब वक्र की ढ़ाल ऋणात्मक हो अर्थात् = –ve

➢ अतः वस्तु किसी निश्चित वेग से गति करते हुए नियत मंदन से मंदित होगी।



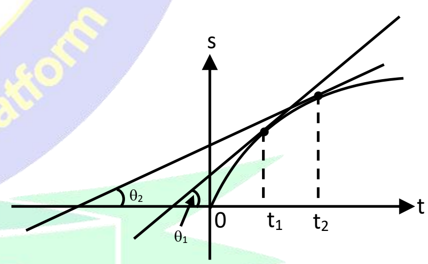
(v) ढाल लगातार बदल रहा है और हमेशा धनात्मक है यानी $\vec{a}$ = चर,

➢ (ढाल का परिमाण)$_{t_1 \text{ पर}}$ < ढाल का परिमाण)$_{t_2 \text{ पर}}$

इसी तरह $\left|\frac{dv}{dt}\right|_{t_1 \text{पर}} < \left|\frac{dv}{dt}\right|_{t_2 \text{पर}} \Rightarrow (\text{त्वरण})_{t_1 \text{पर}} < \text{त्वरण})_{t_2 \text{पर}}$

$\Rightarrow$ त्वरण बढ रहा है।

➢ तो वस्तु के साथ चर और बढ़ते त्वरण के साथ आगे बढ़ रहा है।



(vi) ढाल लगातार बदल रहा है और हमेशा धनात्मक है यानी $\vec{a}$ = चर,

➢ (ढलान का परिमाण)$_{t_1 \text{ पर}}$ > (ढलान का परिमाण)$_{t_2 \text{ पर}}$

इसी तरह $\left|\frac{dv}{dt}\right|_{t_1 \text{पर}} > \left|\frac{dv}{dt}\right|_{t_2 \text{पर}} \Rightarrow (\text{त्वरण})_{t_1 \text{पर}} > \text{त्वरण})_{t_2 \text{पर}}$

$\Rightarrow$ त्वरण कम हो रहा है

➢ तो वस्तु परिवर्तनशील और घटते त्वरण के साथ घूम रही है।

6.6 त्वरण – समय वक्र :

➢ वक्र की ढाल त्वरण में परिवर्तन की दर के बारे मे बताती है लेकिन यह किसी भौतिक राशि को प्रदर्शित नहीं करती है।

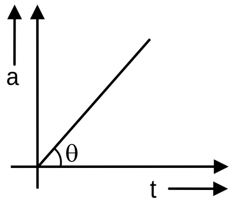
➢ वक्र के द्वारा घेरा गया क्षेत्रफल किसी गतिशील कण के वेग में परिवर्तन को बताता है।

➢ वक्र का औसत त्वरण इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है।

$$a_{Avg.} = \frac{\text{समय अक्ष से संलग्न क्षेत्रफल}}{\text{समयांतराल}}$$

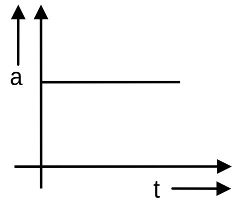
KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

(i)



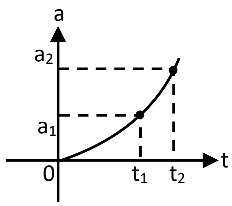
$a \propto t$, $\tan\theta$ = नियत,
अर्थात् एकसमान बढ़ता त्वरण

(ii)



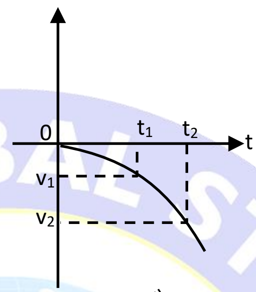
$a \propto t^0$ अर्थात् एकसमान या नियत त्वरण

(iii)



$t_1 \rightarrow$ बढता है
$a \rightarrow$ बढता है

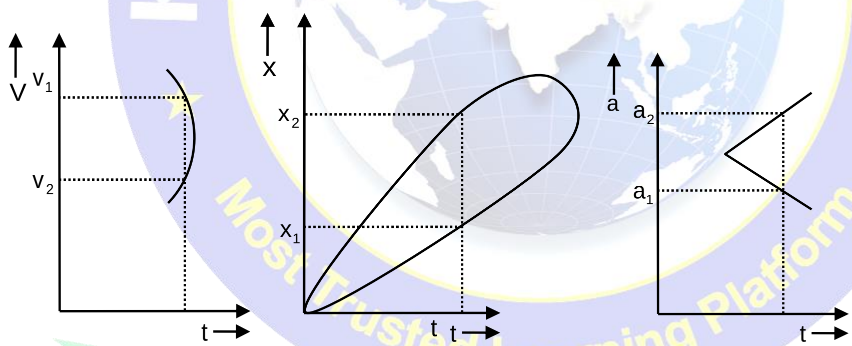
(iv)



$t \rightarrow$ बढता है
त्वरण का परिमाण$\rightarrow$ बढता है।
$t = 0, a = 0$ पर $t = t_1$ और t_2 ऋणात्मक है।

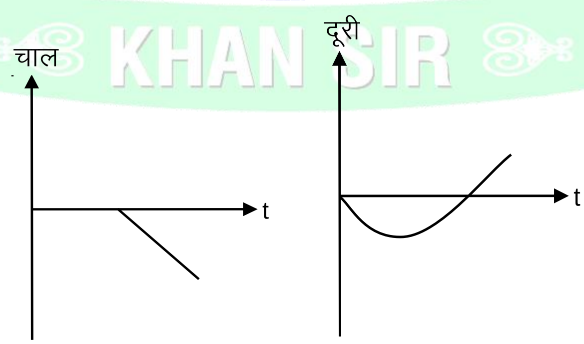
6.6 निम्न ग्राफ अभ्यास में उपस्थित नहीं है:

Case-I



स्पष्टीकरण: एक ही समय पर कोई वस्तु दो विस्थापन, दो वेग, दो त्वरण प्राप्त नहीं कर सकती है।

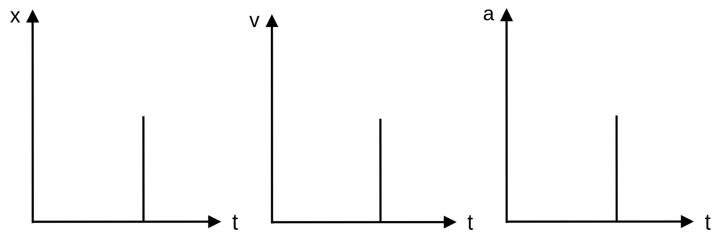
Case-II



स्पष्टीकरण : दूरी तथा चाल कभी ऋणात्मक नहीं होती।

KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR

Case III



स्पष्टीकरण समय नियत नहीं हो सकता है। किसी भी राशि को बिना समय के बदलना असंभव है।

SOLVED EXAMPLES

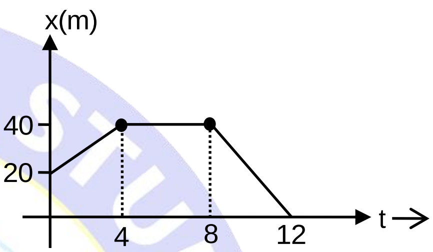
Example 33: दिये गये x – t वक्र के लिए ज्ञात करे।

(i) विस्थापन

(ii) दूरी

(iii) किस क्षण पर औसत वेग शून्य होगा।

(iv) दूरी–समय वक्र भी बनाए। (in sec.)

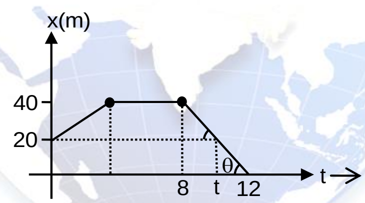


Solution: (i) विस्थापन = $x_f - x_i = 0 - 20 = -20$ m

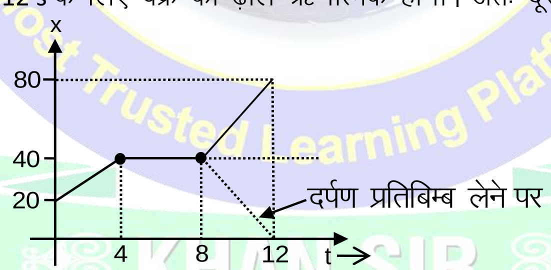
(ii) दूरी = |40 – 20| + |40 – 40| + |0 – 40| = 60 m

(iii) जहाँ कण प्रारम्भिक अवस्था में होगा वहा पर औसत वेग शून्य होगा।

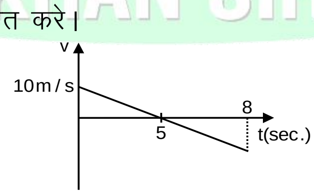
$$\frac{40-20}{t-8} = \frac{20-0}{12-t} \Rightarrow t = 10 \text{ sec.}$$



(iv) t = 8 से t = 12 s के लिए वक्र की ढ़ाल ऋणात्मक होगी। अतः दूरी–समय वक्र आरेखीत किया जायेगा।



Example 34: दिये गये v – t वक्र के लिए ज्ञात करे।



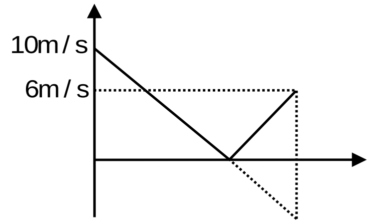
(i) विस्थापन (ii) औसत वेग (iii) दूरी (iv) त्वरण

(v) चाल समय वक्र

Solution: (i) विस्थापन = क्षेत्रफल

चूंकि $\frac{10}{5-0} = \frac{v}{8-5} \Rightarrow v = -6$

अतः विस्थापन = $\left(\frac{1}{2}\times 10\times 5\right) - \frac{1}{2}(3 \times 6) = 16$ m



(ii) औसत वेग = $\frac{16}{8} = 2$ m/s]

(iii) दूरी = $\left|\frac{1}{2}\times 10\times 15\right| + \left|\frac{1}{2}\times 3\times -6\right| = 34$ m

(iv) त्वरण = ढ़ाल = v = –2 m/s^2

(v) चाल समय वक्र आरेखीत किया जायेगा।

Example 35: एक कार कुछ समय के लिये नियत दर α से त्वरित होती है, उसके पश्चात यह नियत दर β से मंदित होकर स्थिर हो जाती है। यदि कुल लगा समय t हो तो ज्ञात कीजिए

(i) अधिकतम वेग

(ii) तय की गई कुल दूरी।

(1) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta t}, \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta t^2}\right)$ (2) $\frac{\alpha\beta t}{\alpha+\beta}, \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta t^2}{\alpha+\beta}\right)$

(3) $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)t}, \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta^2}{\alpha\beta t}\right)$ (4) $\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)t^2}, \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha+\beta^2}{\alpha\beta t}\right)$

Solution (i) माना कि कार t_1 समय लिये त्वरित व t_2 समय के लिये अवमंदित होती है तो

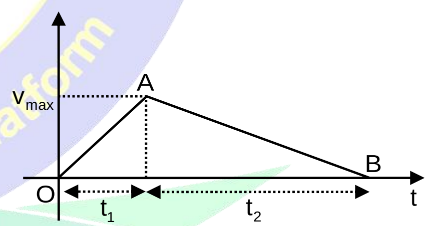
कुल समय $t = t_1 + t_2$ ......(i)

व संबंधित वेग–समय ग्राफ चित्र में प्रदर्शित किया गया है।

ग्राफ से α = रेखा OA की ढ़ाल OA = $\frac{v_{max}}{t_1}$

या $t_1 = \frac{v_{max}}{\alpha}$ ...(ii)

तथा $\beta = -$ रेखा OB की ढ़ाल OB = $\frac{v_{max}}{t_2}$



या $t_2 = \frac{v_{max}}{\beta}$ ...(iii)

समीकरण (i),(ii) व (iii) से $\frac{v_{max}}{\alpha} + \frac{v_{max}}{\beta} = t$

या $v_{max}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)$ या $v_{max} = \frac{\alpha\beta t}{\alpha+\beta}$

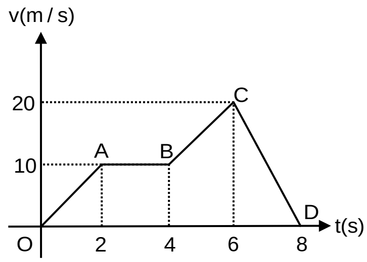
(ii) कुल दूरी = v-t ग्राफ के अधीन क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2}\times t\times v_{max} = \frac{1}{2}\times t\times \frac{\alpha\beta t}{\alpha+\beta}$

दूरी = $\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha\beta t^2}{\alpha+\beta}\right)$

नोट : यह प्रश्न गति की समीकरणों (v = u + at, इत्यादि) के उपयोग द्वारा भी हल किया जा सकता है।

Example 36: एक सरल रेखा में गतिशील कण का वेग समय ग्राफ दिखाया गया है। इस कण के लिए संबंधित विस्थापन समय ग्राफ बनाइये।



(1) 80 m (2) 120 m (3) 60 m (4) 90 m

Solution: विस्थापन = वेग समय ग्राफ के अधीन क्षेत्रफल

इसलिए, $s_{OA} = \frac{1}{2} \times 2 \times 10 = 10$ m

$s_{AB} = 2 \times 10 = 20$ m; v = +ve, a = 0

या $s_{OAB} = 10+20 = 30$ m, v = +ve, a = +ve

$s_{BC} = 2 \times \left(\frac{10+20}{2}\right) = 30$ m

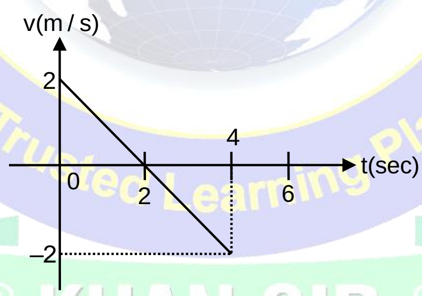
या $s_{OABC} = 30+30 = 60$ m

तथा $s_{CD} = 2 \times \left(\frac{20+0}{2}\right) = 20$m,

v = +ve, a = –ve

या $s_{OABCD} = 60 + 20 = 80$ m

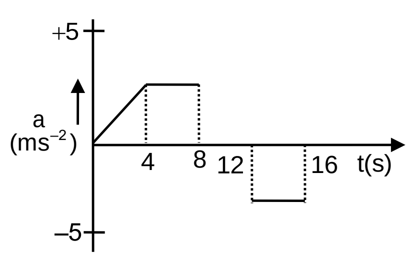
Example 37: एक सरल रेखा में गति करते हुए कण का वेग समय ग्राफ दर्शाये अनुसार है। प्रथम 4 सेकण्ड़ में कण का विस्थापन व तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।



(1) 0, 2 m (2) 2 m, 4 m (3) 0, 4 m (4) 4 m, 4 m

Solution: समय अक्ष के ऊपर का क्षेत्रफल धनात्मक व नीचे का क्षेत्रफल ऋणात्मक लेने पर विस्थापन = (2-2) m = 0 जबकि दूरी के लिये सभी क्षेत्रफलों को धनात्मक लेने पर तय की गई दूरी s = (2 + 2)m = 4m

Example 38: चित्र में दर्शाए अनुसार एक कण का त्वरण जो एक सीधी रेखा के अनुदिश गति करता है। तब कण की अधिकतम चाल होगी।



(1) 60 m/s (2) 40 m/s
(3) 30 m/s (4) 50 m/s

Solution: कण t = 8 सेकण्ड तक त्वरित होगा, t = 8 सेकण्ड तक त्वरण धनात्मक है।

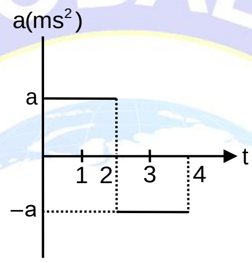
$\Delta v = \int_0^8 a\,dt$ = a – t वक्र के नीचे का क्षैत्रफल $= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 + 4 \times 5 = 30$

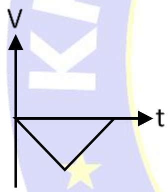
$v_f - v_i = 30$

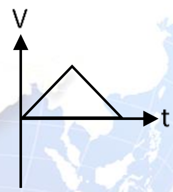
$v_f - 0 = 30$

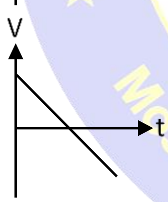
$\{v_{max} = v_f = 30 \text{ m/s}\}$

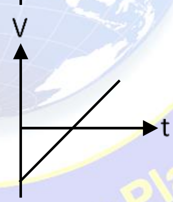
Example 39: चित्रानुसार एक कण विरामावस्था से प्रारम्भ होकर निश्चित त्वरण से गति करता है। चित्र से वेग समय ग्राफ की आकृति होगी।



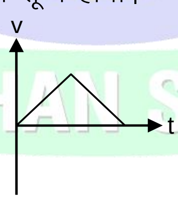
(1)


(2)


(3)


(4)


Solution: t = 2 s तक a m/s² का नियत त्वरण है तथा इसके बाद –a m/s² के परिमाण से मंदित होता है। अतः पहले वेग शून्य से अधिकतम होगा तथा अन्त में शून्य होगा।



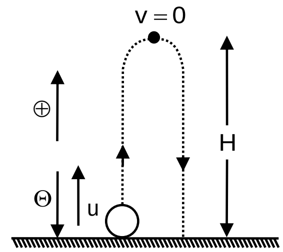
7. गुरूत्व के अधीन गति (मुक्त रूप से गिरना) (MOTION UNDER GRAVITY (FREE FALL)) :

पृथ्वी का वस्तुओं पर आकर्षण बल, गुरूत्व बल कहलाता है। इस गुरूत्व बल के कारण वस्तु में त्वरण उत्पन्न होता है, जिसे गुरूत्वीय त्वरण कहते हैं। इसे 'g' द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

$g = 9.8 \text{ m/s}^2 = 980 \text{ cm/s}^2 = 32 \text{ ft/s}^2$

वायु की अनुपस्थिति में, सभी वस्तुऐ (चाहे उनका आकार, भार अथवा संघटन कुछ भी हो) पृथ्वी सतह पर समान त्वरण से गिरती है। ऊँचाई (h<<पृथ्वी की त्रिज्या) से पृथ्वी की ओर गिरती वस्तु की गति, गुरूत्व के अधीन गति कहलाती है। मुक्त गति (Free Fall) का अर्थ है कि वस्तु का त्वरण गुरूत्वीय त्वरण के बराबर हो।

7.1 यदि एक वस्तु को ऊर्ध्वाधर ऊपर प्रक्षेपित किया जाए:



धनात्मक/ऋणात्मक दिशा चयन का विषय है। आप दूसरा विकल्प भी चुन सकते है।

➢ प्रारम्भिक स्थिति को मूल बिन्दु पर तथा गति की प्रारम्भिक दिशा (अर्थात ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर) को धनात्मक लेने पर $a = -g$ [चूंकि त्वरण नीचे की ओर है तथा गति ऊपर की ओर] अतः यदि वस्तु को u वेग से फेंका जाये तथा t समय पश्चात यह 'h' ऊँचाई तक पहुँच जाये तो

➢ अधिकतम ऊँचाई (H) के लिए $v = 0$

अतः उपरोक्त समीकरण से $u = g\,t$

ऊपर जाने में लगा समय $(t_1) = u/g$

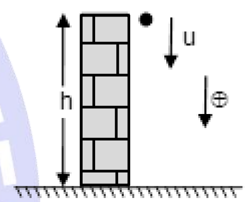
गुरूत्व के अधीन गति में ऊपर जाने में लगा समय, समान दूरी तक नीचे गिरने में लगे समय के बराबर होता है अर्थात (t_2) = ऊपर जाने में लगा समय $(t_1) = u/g$

कुल उड्डयन काल $T = t_1 + t_2 = \dfrac{2u}{g}$

तथा $u^2 = 2gH \Rightarrow H = \dfrac{u^2}{2g}$

$s = vt - at^2 \Rightarrow t$(ऊपर जाने का समय) $= \sqrt{\dfrac{2H_{max}}{g}}$

7.2 यदि वस्तु ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कुछ प्रारम्भिक वेग से किसी ऊँचाई से फेंकी जाये:

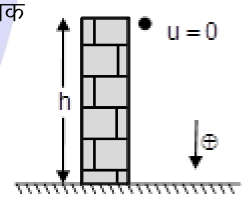


प्रारम्भिक स्थिति को मूल बिन्दु पर लेकर तथा गति की दिशा (अर्थात नीचे की ओर) धनात्मक लेने पर

$v = u + gt$, $\quad h = ut + \frac{1}{2}$

$v^2 = u^2 + 2gh$, $\quad h_{n^{th}} = u + \dfrac{g}{2}(2n-1)$

7.3 यदि किसी वस्तु को किसी ऊँचाई से गिराया जाये (प्रारम्भिक वेग शून्य):



प्रारम्भिक स्थिति को मूल बिन्दु पर लेकर तथा गति की दिशा (अर्थात नीचे की ओर) को धनात्मक लेने पर

$u = 0$[चूंकि वस्तु विराम से प्रारम्भ होती है]

$a = +g$ अतः $v = g\,t,\ h = \frac{1}{2}gt^2, v^2 = 2gh$

7.4 किसी ऊँचाई से, यदि वस्तु ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर कुछ प्रारम्भिक वेग से फेंकी जाये:

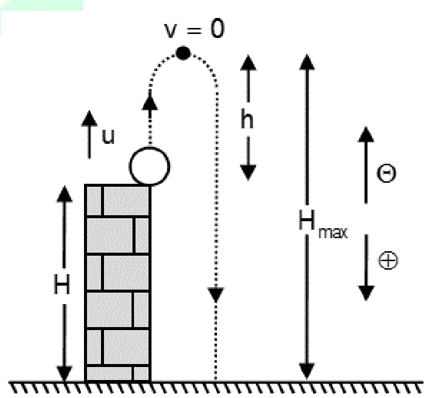
$v = -u + gt$

$H = -ut + \frac{1}{2}gt^2$

$v^2 = u^2 + 2gH$

$h_{nth} = -u + \dfrac{g}{2}(2n-1)$

7.5 गुरूत्व के अधीन गति में गति की समीकरण के अनुप्रयोग :



आरंभिक स्थिति मूलबिन्दु को लेते हुए तथा ऊपरी दिशा को ऋणात्मक मानने पर

$v = -u + gt;\ H = -ut + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow v^2 = u^2 + 2gh;\ n^{th} = -u + \dfrac{g}{2}(2n-1)$

➢ वस्तु के द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई $H_{max} = H + h = H + \dfrac{u^2}{2g}$

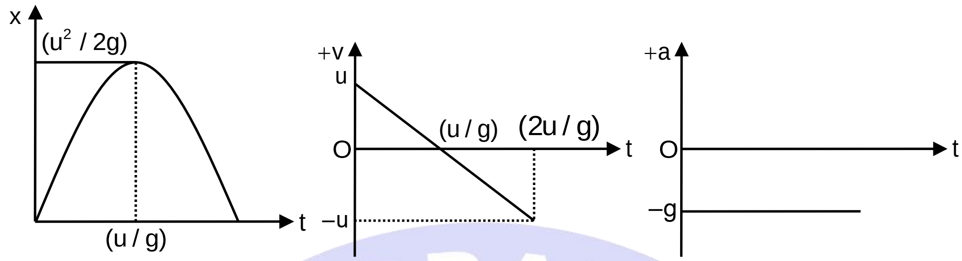
➢ वस्तु के द्वारा तय की गई दूरी $H + 2h = H + \dfrac{u^2}{2g}$

वस्तु के द्वारा भूतल तक पहुँचने में लगा समय $H = -ut + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - ut - H = 0 \Rightarrow gt^2 - 2ut - 2H = 0$

KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR

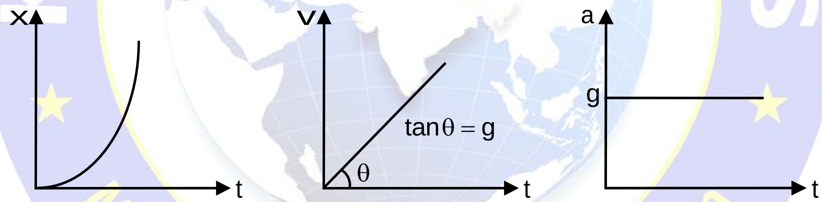
इस समीकरण को हल करने के बाद हमें परिणाम मिलता है।

- गुरुत्वाकर्षण के तहत गति कि स्थिति में, जिस गति से किसी पिंड को ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है, वह उस गति के बराबर होता है जिसके साथ वह प्रक्षेपण बिंदु पर वापस आता है।
- पथ पर किसी भी बिंदु पर वेग का परिमाण समान होता है चाहे शरीर ऊपर या नीचे की दिशा में चल रहा हो।
- समय के सापेक्ष विस्थापन, वेग तथा त्वरण के ग्राफ (जब वस्तु को ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका जाए)

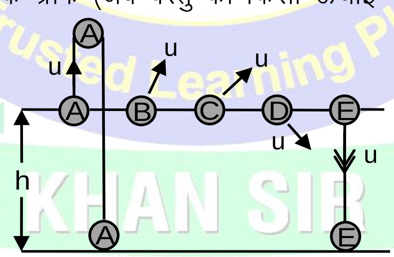


- चूंकि $h = (1/2)\,gt^2$, अर्थात $h \propto t^2$, अतः समय t, 2t, 3t, इत्यादि में चली गयी दूरियां क्रमशः 1^2 2^2 3^2, अर्थात क्रमागत पूर्णाकों के वर्गो के अनुपात में होगी। (विरामावस्था से स्वतंत्रतापूर्वक गिरने की स्थिति में)
- गति वस्तु के द्रव्यमान से स्वतंत्र है, क्योंकि द्रव्यमान गति के किसी भी समीकरण में सम्मिलित नही है। द्रव्यमान इसीलिए एक भारी तथा हल्की वस्तु को जब समान ऊँचाई से गिराया जाता है, तो वे एक साथ तथा समान वेग से जमीन पर पहुँचती है। अर्थात $t = \sqrt{(2h/g)}$ व $v = \sqrt{2gh}$
- n वें सैकण्ड में तय की गई गयी दूरी, (कुछ ऊँचाई से गिरने वाली एक वस्तु के लिए)

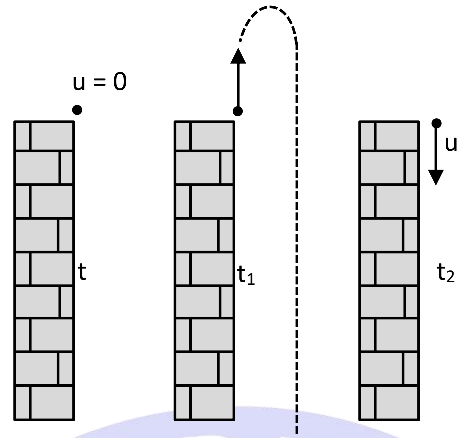
  $h_n = \frac{1}{2}g(2n\text{-}1)$
- समय के संबंध में दूरी, वेग और त्वरण का ग्राफ :
  (कुछ ऊंचाई से गिराए गए वस्तु के लिए)



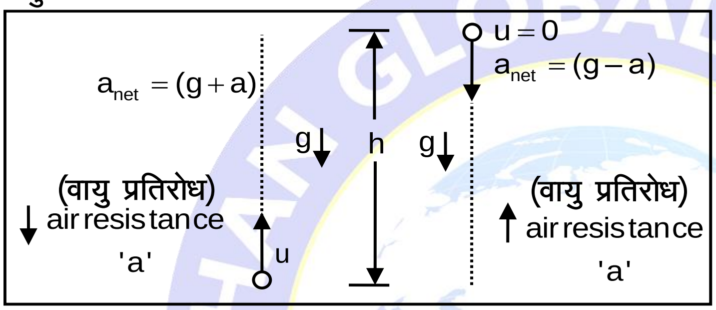
- समय के सापेक्ष दूरी, वेग तथा त्वरण के ग्राफ (जब वस्तु को किसी ऊँचाई से छोड़ा जाये)



- यदि विभिन्न कण समान प्रारम्भिक चाल से परन्तु विभिन्न दिशाओं में फेंके जाये तो
- सभी कण पृथ्वी पर भिन्न भिन्न समय पश्चात परन्तु समान चाल से पहुंचते है, चाहे उनके प्रारम्भिक वेगों की दिशा कुछ भी क्यों न हो।
- कण E के लिए समय न्यूनतम होगा जो कि उर्ध्वाधर नीचे की ओर फेंका गया है
- कण A के लिए समय अधिकतम होगा जो कि ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंका गया है।
- कोई गेंद h ऊँचाई की एक इमारत से नीचे गिराई जाती है तथा यह धरातल पर t समय में पहुंचती है।
  उसी इमारत से दो गेंदें समान चाल से (एक नीचे की ओर तथा एक ऊपर की ओर) फेंकी जाती है तथा वे क्रमशः t_1 व t_2 समय पश्चात धरातल पर पहुंचती है, तो $t = \sqrt{t_1 t_2}$



7.6 वायु घर्षण:



- एक वस्तु ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंकी जाती है, यदि नियत वायु प्रतिरोध को ध्यान में रखा जाये
  ऊपर की ओर की गति के लिये कुल त्वरण
  $a_{net} = g + a$ (नीचे की ओर)
  यदि वस्तु की अधिकतम ऊँचाई 'H' हो तो
  $t_{आरोहण} = \sqrt{\frac{2H}{a_{Net}}} \Rightarrow t_{आरोहण} = \sqrt{\frac{2H}{g+a}}$
  नीचे की ओर गति के लिए -
  कुल त्वरण $a_{Net} = g - a$ (नीचे की ओर)
  अत: $t_{अवरोहण} = \sqrt{\frac{2H}{g-a}}$
  और $t_{अवरोहण} > t_{आरोहण}$
- नीचे की ओर गति में a तथा g दोनों विपरीत दिशा में कार्य करेंगे क्योंकि a सदैव गति की दिशा के विपरीत कार्य करता है, जबकि g सदैव ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है।

SOLVED EXAMPLES

Example 40: एक ग्रह पर एक गेंद को उर्ध्वाधर ऊपर की ओर 20m/s के वेग से प्रक्षेपित किया जाता है जहाँ गुरूत्व त्वरण $10 m/s^2$ है। (i) अधिकतम ऊँचाई तक पहुचने में कितना समय लेगा। (ii) यह प्रक्षेप्य बिन्दु से कितनी ऊँचाई तक पहुँचेगा। (iii) प्रक्षेप्य बिन्दु से 10 m तक की ऊँचाई तक पहुचने में लिया गया समय ?

Solution: जैसा की यहाँ गति ऊर्ध्वाधर ऊपर की और है

$a = g$ तथा $\upsilon = 0$

(i) गति की प्रथम समीकरण से अर्थात्, $v = u + at$,
$0 = 20 – 10t$, अत: , $t = 2s$

(ii) गति की तृतीय समीकरण से अर्थात्, $v^2 = u^2 + 2as$,
$0 = (20)^2 – 2 \times 10 \times h$, अर्थात्, $h = 20$ m

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

(iii) गति की द्वितीय समीकरण से अर्थात्, $s = ut + \frac{1}{2} at^2$,

$$10 = 20t - \left(\frac{1}{2}\right) \times 10 \times t^2$$

अर्थात्, $t^2 - 4t + 2 = 0$

या $t = 2 \pm \sqrt{2}$, i.e., t = 0.59 s or 3.41 s

अर्थात्, यहा इस प्रकार के दो समय होगें, एक बार जब गेंद ऊपर की ओर तथा जब गेंद नीचे की ओर आयेगी।

Example 41: एक कलाबाज हवा में गेंद फेंकता है। वह एक और फेंकता है, जब पहले वाली अपनी अधिकतम ऊँचाई पर है। कितनी ऊँचाई पर गेंदे जाएगी गुरूत्त्व की वजह से त्वरण g है।

Solution: चूंकि कलाबाज हर सेकण्ड में n गेंद फेंक रहा है। जब पहली अधिकतम बिन्दु पर पहुँचने में लगा समय,

t = (1/n) s

तथा उच्चतम बिन्दु पर $v = 0$, गति की पहली समीकरण से,

$0 = u - (g)(1/n)$, i.e., $u = (g/n)$ ....(i)

अब गति की तीसरी समीकरण से, i.e.,

$\upsilon^2 = u^2 + 2as$,

$0 = u^2 - 2gh$, i.e., $h = (u^2/2g)$

or $h = \frac{g}{2n^2}$ $\left[\text{समी (1) से } u = \frac{g}{n}\right]$

Example 42: एक पत्थर के टुकडे को विरामावस्था से निश्चित ऊँचाई से छोड़ा जाता है तथा स्वतन्त्र पूर्वक गिरता हुआ 4 m/s की चाल से फर्श से टकराता है। अगला पत्थर 3 m/s की प्रारम्भिक चाल से समान ऊँचाई से गिराते है। तब इसकी फर्श पर चाल क्या होगी।

(1) 3 m/s (2) 5 m/s (3) 8 m/s (4) 12 m/s

Solution: **प्रथम स्थिति**

$v^2 = u^2 + 2gh$

$16 = 0 + 2 \times 10 \times h \Rightarrow h = \frac{16}{20}$ m

द्वितीय स्थिति

$v^2 = u^2 + 2gh$

$v^2 = 9 + 2 \times 10 \times \frac{16}{20}$

$v^2 = 9 + 16 \Rightarrow v^2 = 25$

[v = 5 m/s]

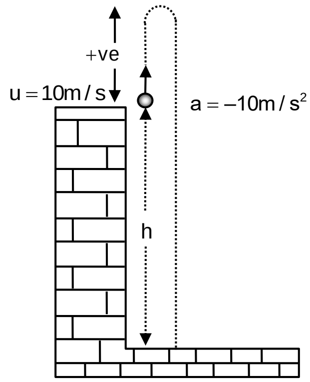
Example 43: 40 m ऊँचे टॉवर से एक गेंद 10 m/s वेग से ऊपर की ओर फेंकी जाती है, वह समय ज्ञात कीजिये जिसके पश्चात वह जमीन से टकरायेगी। ($g = 10\ m/s^2$)

(1) 1 s (2) 2 s (3) 3 s (4) 4 s

Solution: प्रश्न मे = + 10 m/s,

$a = -10\ m/s^2$ तथा $s = -40$ m

(उस बिन्दु की दूरी जहां पर गेंद जमीन से टकराती है।)



समीकरण in $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ में मान रखने पर

$-40 = 10t - 5t^2$ or $5t^2 - 10t - 40 = 0$

या $t^2 - 2t - 8 = 0$

हल करने पर t = 4 s और – 2s प्राप्त होती है। धनात्मक मान लेने पर t = 4s.

Example 44: एक वस्तु को पृथ्वी की सतह से h ऊँचाई से स्वतंत्रतापूर्वक छोड़ा जाता है। पहलें एक सेकण्ड, पहले दो सेकण्ड तथा पहले तीन सेकण्ड इत्यादि में तय की गई दूरियों का अनुपात ज्ञात कीजिये। साथ ही प्रथम, द्वितीय, तृतीय ...सेकण्ड़ इत्यादि में तय की गयी दूरियों का अनुपात भी ज्ञात कीजिये।

(1) 1 : 3 : 5 ; 1 : 1 : 1 (2) 1 : 4 : 9 ; 1 : 3 : 5 (3) 1 : 3 : 5 ; 1 : 4 : 9 (4) 1 : 1 : 1 ; 1 : 3 : 5

Solution: गति की द्वितीय समीकरण से $h = \frac{1}{2}gt^2$

$h_1 : h_2 : h_3 \ldots\ldots = \frac{1}{2}g(1)^2 : \frac{1}{2}g(2)^2 : \frac{1}{2}g(3)^2 = 1^2 : 2^2 : 3^2 \ldots\ldots = 1 : 4 : 9 : \ldots\ldots$

n वें सेकण्ड में तय की गई दूरी $s_n = u + \frac{1}{2}a(2n-1)$

जहाँ $u = 0, a = g$ अतः, $S_n = \frac{1}{2}g(2n-1)$

या $S_1 : S_2 : S_3 \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2}g(2 \times 1 - 1) : \frac{1}{2}g(2 \times 2 - 1) : \frac{1}{2}g(2 \times 3 - 1)$

$= 1 : 3 : 5 \ldots\ldots$

Example 45: एक रॉकेट जमीन से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर 10 m/s^2 परिणामी ऊर्ध्वाधर त्वरण से दागा जाता है। 1 मिनट पश्चात ईंधन समाप्त हो जाता है और यह ऊपर की ओर गति जारी रखता है। ज्ञात कीजिये –

(i) प्राप्त की गयी अधिकतम ऊँचाई कितनी है ?

(1) 18 km (2) 36 km (3) 72 km (4) 108 km

(ii) ईंधन समाप्त होने के पश्चात कितने समय तक यह ऊपर की ओर गति करेगा ? (g = 10 m/s^2)

(1) 60 s (2) 120 s (3) 240 s (4) 180 s

Solution: (i) ईंधन जलने तक (60s) रॉकेट द्वारा तय की गई दूरी, जिसमें परिणामी त्वरण 10 m/s^2 ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर है।

$h_1 = 0 \times 60 + (1/2) \times 10 \times 60^2 = 1800$ m = 18 km

तथा रॉकेट द्वारा प्राप्त किया गया वेग $v = 0 + 10 \times 60 = 600$ m/s (ऊपर की ओर)

1 मिनिट पश्चात ऊर्ध्वाधर दिशा में रॉकेट का प्रारम्भिक वेग 600 m/s है तथा गुरूत्वीय त्वरण इसकी गति का विरोध करता है। इसलिए यहां से h_2 ऊँचाई पर पहुंचने पर इसका वेग शून्य हो जाता है।

$0 = (600)^2 - 2gh_2$ तथा $h_2 = 18000$ m = 18 km

$[g = 10\ ms^{-2}]$

अतः सतह से रॉकेट द्वारा प्राप्त की गई अधिकतम ऊँचाई = 36 km

(ii) ईंधन समाप्त होने के तुरंत पश्चात रॉकेट का प्रारम्भिक वेग 600 m/s है और गुरूत्व इसकी गति का विरोध करता है। इसलिए गति की प्रथम समीकरण से ईंधन समाप्ति के पश्चात वेग v = 0 होने में लगा समय

$v = u + at;\ 0 = 600 - 10t;\ t = 60$ sec

$v = u + at$

$0 = 600 - 10t$

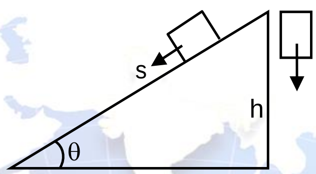
$t = 60$ sec

Example 46: एक ब्लॉक चिकने नत तल पर फिसल रहा है जबकि दूसरा ब्लॉक उसी बिन्दु से मुक्त रूप से गुरूत्व के अधीन गिरता है। दोनों में से कौनसा ब्लॉक जमीन पर (i) पहलें पहुंचेगा (ii) ज्यादा चाल से टकरायेगा।

Solution: आनत तल पर फिसलन गति की स्थिति में :–

$\frac{h}{s} = \sin\theta \qquad \Rightarrow s = \frac{h}{\sin\theta}, \qquad a = g\sin\theta \qquad t_s = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2}{g\sin\theta} \times \frac{h}{\sin\theta}} = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v_s = \sqrt{2as} = \sqrt{2g\sin\theta \times \frac{h}{\sin\theta}} = \sqrt{2gh} = v_F$



मुक्त रूप से गुरूत्व के अधीन गिरने की स्थिति में

$t_F = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ and $v_F = \sqrt{2gh} = v_s = v_p$

(i) $\because \sin\theta < 1,\ t_F < t_s$, अर्थात गुरूत्व के अधीन गति करती हुई वस्तु धरातल पर पहले पहुंचेगी।

(ii) $v_F = v_s$, अर्थात, दोनों वस्तुएं समान चाल से धरातल पर पहुंचेगी

Example 47: एक कण 15 m/s के वेग से ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर गुरूत्व त्वरण के विरूद्ध फेंका जाता है तथा 5 m/s² का वायु प्रतिरोध है उड्डयन काल तथा अधिकतम ऊँचाई ज्ञात करे।

(1) $\sqrt{3}$ s, 15 m (2) $(\sqrt{2}+1)$ s, 15 m (3) $(\sqrt{3}+1)$ s, 30 m (4) $(\sqrt{3}+1)$ s, $\frac{15}{2}$ m

Solution: $v^2 = u^2 + 2ah$

$0 = 15^2 - 2 \times (g + a)h$

$h = \frac{15 \times 15}{2(15)} \qquad \Rightarrow \left\{h_{max} = \frac{15}{2} m\right\}$

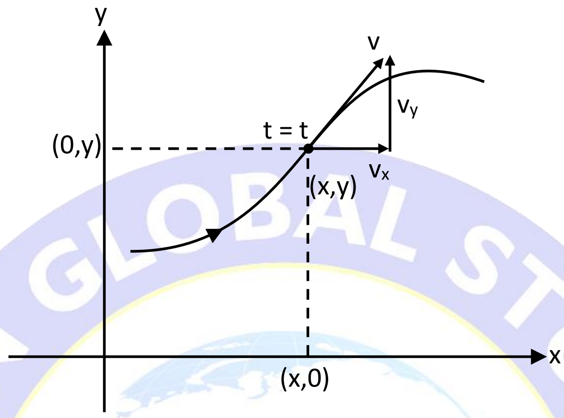
$t_{\text{आरोहण}} = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = \sqrt{\frac{2 \times 15}{2 \times 15}} = 1$ sec

$t_{\text{अवरोहण}} = \sqrt{\frac{2h}{g-a}} = \sqrt{\frac{2 \times 15}{2 \times 5}} = \sqrt{3}$ sec

Time of flight = T = $t_{\text{आरोहण}} + t_{\text{अवरोहण}} = (1 + \sqrt{3})$sec

8. सामान्य द्विविमीय (2–D) गति (GENERAL TWO DIMENTION (2-D) MOTION):

सामान्य द्वि – विमीय गति वह गति है जहां तीन में से दो समन्वय 'समय के साथ बदलते हैं, इस तरह की गति में परिवर्तन के लिए हम गति को दो अक्षों (क्रमशः x अक्ष और y कहते हैं) के साथ–साथ होने वाली दो 1–D गति का अध्यारोपण मानते हैं। यहाँ समय दो 1–D गतियों को जोड़ने वाला सूत्र है। साथ ही सभी अवधारणाएँ 1–D गति के लिए लागू होती हैं, जबकि किसी भी अक्ष के साथ गति परिवर्तित की जाती है लेकिन हम वेग के स्थान पर वेग के घटक और त्वरण के स्थान पर त्वरण के घटक का उपयोग करते हैं।



Example: $\vec{r} = at^2\hat{i} + 2bt\hat{j}$, a और b धनात्मक स्थिरांक हैं।

(a) प्रक्षेपवक्र का समीकरण ज्ञात किजिए (x और y के बीच संबंध) अतः y (x)

(b) $\vec{v}$ व $\vec{a}$ बीच के कोण की समय निर्भरता हैं।

Solution: (a) प्रक्षेपवक्र का समीकरण ज्ञात करना

(i) समय, t पर कार्य के रूप में y अक्ष के अनुदिश विस्थापन का समीकरण लिखिए।

(ii) x अक्ष के अनुदिश विस्थापन का समीकरण समय, t के फलन के रूप में लिखिए।

(iii) एक समीकरण से समय का मान ज्ञात कीजिए और दूसरे समीकरण में समय का मान रखिए।

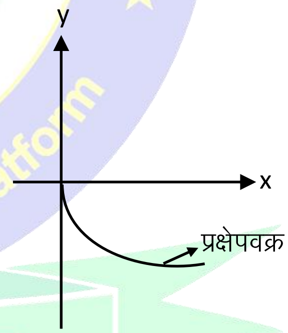
$\vec{r} = at^2\hat{i} + 2bt\hat{j} \Rightarrow x\hat{i} + y\hat{j} = at^2\hat{i} + 2bt\hat{j}$

y अक्ष के साथ गति

$y = -2bt \Rightarrow t = \frac{y}{-2b}$ .... (1)

x अक्ष के साथ गति

$x = at^2 \Rightarrow x = a\left(\frac{y}{-2b}\right)^2 \Rightarrow x = \left(\frac{a}{4b^2}\right)y^2$



(b) $\vec{v} = 2at\hat{i} - 2b\hat{j}$ व $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2a\hat{i} + 0\hat{j}$

x अक्ष के साथ गति $a_x = \frac{dv_x}{dt} = 2a$ व y अक्ष के साथ गति $a_y = \frac{dv_y}{dt} = 0$

$\vec{a} = 2a\hat{i}$

$\vec{a}$ & $\vec{v}$ के बीच का कोण θ हैं

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{|\vec{v}||\vec{a}|} = \frac{(2at\hat{i} - 2b\hat{j})\cdot(2a\hat{i} + 0\hat{j})}{\left[\sqrt{(2at)^2 + (2b)^2}\right]\left[\sqrt{(2a)^2 + (0)^2}\right]} = \frac{at}{\sqrt{a^2t^2 + b^2}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{at}{\sqrt{a^2t^2 + b^2}}\right)$$

Example: एक कण $\vec{v} = a\hat{i} + bx\hat{j}$ के xy तल के अनुदिष घूमता हैं जहाँ a व b स्थिरांक हैं वेग प्रारम्भिक समय t = 0) पर x = y = 0 हैं तो कण कि प्रक्षेपीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

Solution: $\vec{v} = a\hat{i} + bx\hat{j} \Rightarrow v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = a\hat{i} + bx\hat{j}$

x अक्ष के अनुदिष गति $\rightarrow v_x = a \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t a dt \Rightarrow x = at \Rightarrow t = \frac{x}{a}$

y अक्ष के अनुदिष गति $\rightarrow v_y = bat \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t bat dt \Rightarrow y = \frac{abt^2}{2}$

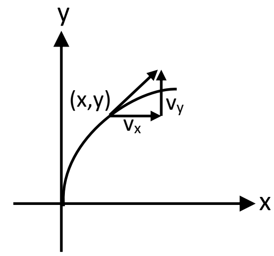
y कि प्रक्षेपीय समीकरण $\frac{ab}{2}\left(\frac{x}{a}\right)^2 \Rightarrow y = \left(\frac{b}{2a}\right)x^2$

Example: एक गुब्बारा नियत वेग से चलना शुरू करता है v_0 (आरोही दर) d_2 हवा गुब्बारा एक क्षैतिज वेग घटक v_x = ay प्राप्त करता है जब a धनात्मक स्थिरांक होता है और y चढ़ाई की ऊंचाई होती है चढ़ाई की ऊंचाई पर क्षैतिज बहाव की निर्भरता ज्ञात करें

Solution: y अक्ष के अनुदिष गति $\rightarrow v_y = v_0 = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int_0^y dy = \int_0^t v_0 dt \Rightarrow y = v_0 t \Rightarrow t = \frac{y}{v_0}$

x अक्ष के अनुदिष गति $\rightarrow v_x = \frac{dx}{dt} = ay \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t a v_0 t dt \Rightarrow x = \frac{a v_0 t^2}{2}$, t का

मान रखने पर हमें प्रक्षेपीय समीकरण प्राप्त होती हैं $\rightarrow x = \frac{a v_0}{2} \times \frac{y^2}{v_0^2} \Rightarrow x = \left(\frac{a}{2v_0}\right)y^2$



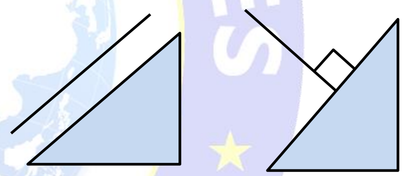
9. प्रक्षेप्य गति (PROJECTILE MOTION):

मान लिजिए

क्षैतिज और लंबवत को पृथ्वी की सतह के संबंध में परिभाषित किया गया है

क्षैतिज: पृथ्वी की सतह के समानांतर

लंबवत: पृथ्वी की सतह के लंबवत



[झुकाव तल के समानांतर समतल लेकिन क्षैतिज के नहीं]

[झुकाव तल के लम्बवत समतल लेकिन लंबवत के नहीं]

SPOT LIGHT

- ➢ क्षैतिज और लंबवत सार्वभौमिक दिशा नहीं हैं क्योंकि ध्रुव पर खड़े एक प्रक्षेक के लिए क्षैतिज दिशा भूमध्य रेखा पर खड़े अन्य प्रेक्षक के लिए लंबवत होती है। यहां हम छोटी दूरी की दूरी के बारे में बात करेंगे, इसलिए सभी प्रेक्षकों के लिए क्षैतिज और लंबवत समान होंगे।

जब एक वस्तु को इस प्रकार प्रक्षेपित किया जाता है कि प्रक्षेपण वेग, बल के समान्तर नहीं हो, तब वस्तु वक्र पथ के अनुदिश गति करती है। यदि वस्तु पर आरोपित त्वरण नियत हो तब वस्तु का वक्र पथ परवलयिक होगा। इस प्रकार की गति प्रक्षेप्य गति कहलाती है।

(i) आकाश में फैंका गया एक कण जो कि गुरूत्व बल के अधीन गति करता है, प्रक्षेप्य कहलाता है। इस कण की गति प्रक्षेप्य गति कहलाती है।

(ii) एकमात्र बल "गुरुत्वाकर्षण" के प्रभाव में कोई भी कण $(m\vec{g})$ पृथ्वी की सतह के पास लंबवत नीचे की ओर एक त्वरण "g" के बराबर होगा।

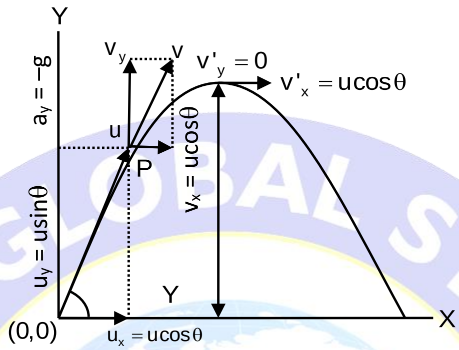
(iii) पृथ्वी की सतह के निकट "g" का मान होता है $g = 10 m/s^2$ or $9.8 m/s^2$ or $980 cm/s^2$ or $32 feet/s^2$

(iv) यह नियत त्वरण की गति का उदाहरण है। अतः प्रक्षेप्य गति को हल करने के लिए, गति के समीकरणों का उपयोग किया जा सकता है।

(v) यदि कण को तिर्यक दिशा में प्रारम्भिक वेग से एकसमान त्वरण प्रदान किया जाता है तो कण का परिणामी पथ परवलयाकार होता है। माना कि X-अक्ष धरातल के अनुदिश तथा U-अक्ष उर्ध्वाधर है तो, धरातल से θ कोण पर प्रक्षेपित प्रक्षेप्य का पथ नीचे दिखाये अनुसार होगा।

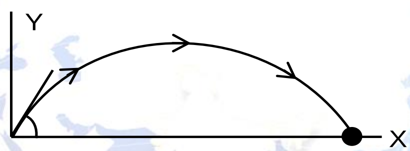
DETECTIVE MIND

प्रक्षेप्य गति 1–D गति हो सकती है (इसे लंबवत ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है) या 2–D गति (यदि इसे 90° को छोड़कर क्षैतिज के साथ किसी कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है)

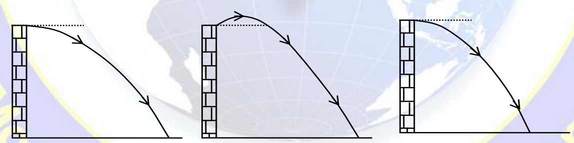


प्रक्षेप्य के प्रकार

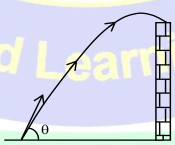
(i) जमीन से जमीन अथवा समतल से समतल



(ii) ऊँचाई से जमीन



(iii) जमीन से ऊँचाई



10. धरातल से धरातल पर प्रक्षेपण (GROUND TO GROUND PROJECTION) :

प्रक्षेप्य गति को दो परस्पर लम्बवत् गतियों का संयोजन माना जा सकता है, जो कि एक दूसरे पर निर्भर नहीं है, अर्थात प्रक्षेप्य गति = क्षैतिज गति + उर्ध्व गति

10.1 क्षैतिज गति:

क्षैतिज दिशा में प्रारम्भिक वेग = $u\cos\theta = u_x$

क्षैतिज दिशा में त्वरण = $a_x = 0$ (हवा का प्रतिरोध नगण्य मानने पर) अतः क्षैतिज वेग अपरिवर्तित रहता है।

- किसी क्षण कण का क्षैतिज वेग $u_x = u\cos\theta$
- किसी समय t पर x निर्देशांक या X- दिशा में विस्थापन

$x = u_x t$ या $x = (u\cos\theta)t$

10.2 उर्ध्व गति :

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

यह गुरूत्व के अधीन गति है अतः जब कण ऊपर की ओर गति करता है तो इसकी उर्ध्वाधर चाल घटती है। उर्ध्वाधर दिशा में प्रारम्भिक वेग = $u \sin\theta = u_y$

उर्ध्व दिशा में त्वरण = $a_y = -g$

- समय t, पर, उर्ध्वाधर चाल $v_y = u_y - gt = u\sin\theta - gt$
- t समय में, उर्ध्वदिशा में विस्थापन या धरातल से कण की ऊँचाई

$$y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2 = (u\sin\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2$$

10.3 परिणामी गति :

परिणामी प्रारम्भिक वेग = = $u_x\,\hat{i} + u_y\,\hat{j} = u\cos\theta\,\hat{i} + u\sin\theta\,\hat{j}$

u कि दिशा को क्षेतिज के साथ बनने वाले कोण के रूप में समझाया जा सकता है।

कुल त्वरण = $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = -g\hat{j}$ (g की दिशा नीचे की ओर है)

10.4 समय t पर कण के निर्देशांक :

Let (x, y) किसी समय t पर कण के निर्देशांक हो तब

$x = u_x t$ and $y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2$

t समय में परिणामी विस्थापन = $\sqrt{x^2 + y^2}$

10.5 समय t पर कण का वेग :

= $v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} = u_x\,\hat{i} + (u_y - gt)\,\hat{j} = u\cos\theta\,\hat{i} + (u\sin\theta - gt)\,\hat{j}$

वेग का परिमाण $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

यदि धरातल से वेग $\vec{v}$ का कोण α है, तो

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{u_y - gt}{u_x} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{u\sin\theta - gt}{u\cos\theta} = \tan\theta - \frac{gt}{u\cos\theta}$$

10.6 प्रक्षेप्य के वेग तथा संवेग में परिर्वतन :

जब कण पुनः धरातल पर बिन्दु B पर लौटता है तो इसका y- निर्देशांक शून्य तथा इसका वेग u, धरातल से θ कोण पर होता है। कुल कोणीय परिवर्तन 2θ

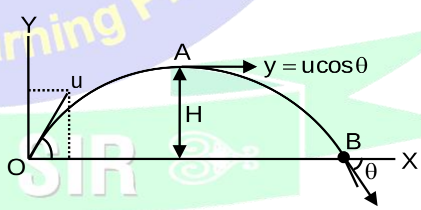
प्रारम्भिक वेग $\vec{u}_1 = u\cos\theta\hat{i} + u\sin\theta\hat{j}$

अंतिम वेग $\vec{u}_1 = u\cos\theta\hat{i} - u\sin\theta\hat{j}$

इसके वेग में कुल परिवर्ततन $|\Delta\vec{v}| = 2u\sin\theta$

संवेग में कुल परिवर्तन

$|\Delta\vec{p}| = m|\Delta\vec{v}| = 2u\sin\theta$



- चाल में परिवर्तन = 0

10.7 उड्डयन काल : (T)

कण को पुनः धरातल (उसी तल पर) पर आने में लगा समय उड्डयन काल या उड़ान का समय (T) कहलाता है। T समय पर कण पुनः धरातल पर आएगा अर्थात y- अक्ष के अनुदिश विस्थापन शून्य होगा ।

$$\therefore y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\therefore 0 = u_y T - \frac{1}{2}gT^2 \qquad \text{या} \qquad T = \frac{2u_y}{g} = \frac{2u\sin\theta}{g}$$

ऊपर जाने का समय = नीचे आने का समय = $\frac{T}{2} = \frac{u_y}{g} = \frac{u\sin\theta}{g}$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

अतः $\frac{T}{2}$ समय पर कण इसके पथ की अधिकतम ऊँचाई प्राप्त कर लेता है।

10.8 प्राप्त की गयी अधिकतम ऊँचाई (H) :

अधिकतम ऊँचाई पर उर्ध्वाधर वेग का मान शून्य हो जाता है, इस क्षण पर y निर्देशांक का मान ही कण की अधिकतम ऊँचाई होगी।

$\because v_y^2 = u_y^2 - 2gy \qquad \because 0 = u_y^2 - 2gy_{max}$

$$H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

10.9 क्षैतिज परास (R) :

यह कण की सम्पूर्ण उड़ान के दौरान कण द्वारा X- दिशा में तय विस्थापन है।

$\because x = u_x t \quad \therefore R = u_x T = u_x \frac{2u_y}{g}$

$$R = \frac{2u_x u_y}{g} = \frac{2(u\cos\theta)(u\sin\theta)}{g} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

10.10 अधिकतम क्षैतिज परास (R_{MAX}):

यदि θ का मान $\theta = 0°$ to $90°$ तक बढ़ता है, परास $\theta = 0°$ से $45°$ तक बढ़ती है लेकिन इसका मान $45°$ के बाद घटता है। अतः $\theta = 45°$ पर परास अधिकतम होती है।

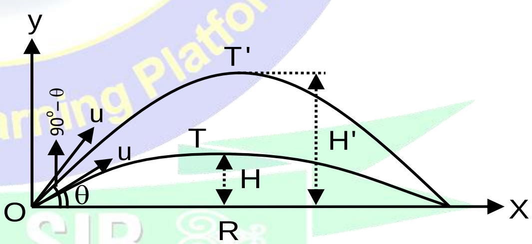
अधिकतम परास के लिए $\theta = 45°$ तथा $R_{max} = \frac{u^2 \sin 2(45°)}{g} \Rightarrow R_{max} = \frac{u^2}{g}$

10.11 समान परास के दो प्रक्षेप्यों की तुलना :

जब दो प्रक्षेप्य समान चाल से θ तथा $(90° - \theta)$ कोणों पर प्रक्षेपित किये जाते हैं तो उनकी परास समान लेकिन प्राप्त की गयी अधिकतम ऊँचाई भिन्न–भिन्न होगी तथा उड्डयन काल भी भिन्न–भिन्न होंगे।

θ, कोण पर, $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$(90° - \theta)$, कोण पर, $R' = \frac{u^2 \sin 2(90° - \theta)}{g} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$



$\Rightarrow$ अतः, $R' = R$

प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई

$H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$ तथा

$H' = \frac{u^2 \sin^2(90° - \theta)}{2g} = \frac{u^2 \cos^2\theta}{2g}$

- $\frac{H}{H'} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$
- $HH' = \frac{u^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{4g^2} = \frac{R^2}{16} \Rightarrow R = 4\sqrt{HH'}$
- $H + H' = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} + \frac{u^2 \cos^2\theta}{2g} \Rightarrow H + H' = \frac{u^2}{2g}$

प्रक्षेप्यों का उड्डयन काल

$$T = \frac{2u\sin\theta}{g} \; ; T' = \frac{2u\sin(90^\circ-\theta)}{2g} = \frac{2u\cos\theta}{g}$$

- $\frac{T}{T'} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$
- $T\,T' = \frac{4u^2\sin\theta\cos\theta}{g^2} = \frac{2R}{g} \Rightarrow T\,T' \propto R$

10.12 प्रक्षेप्य के पथ की समीकरण :

क्षैतिज दिशा के अनुदिश

$x = u_x t$ or $x = (u\cos\theta)\, t$

उर्ध्वाधर दिशा के अनुदिश

$y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2$ or $y = (u\sin\theta)\, t - \frac{1}{2}gt^2$

हल करने पर

$$y = (u\sin\theta)\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{u\cos\theta}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}$$

हम कह सकते हैं कि प्रक्षेप्य परवलयकार पथ का अनुसरण करता है।

यह परवलय की समीकरण है।

पुनः $y = x\tan\theta\left[1 - \frac{gx}{2u^2\sin\theta\cos\theta}\right]$

$$\Rightarrow \quad y = x\tan\theta\left[1 - \frac{x}{R}\right]$$

10.13 प्रक्षेप्य की गतिज ऊर्जा :

गतिज ऊजा = $\frac{1}{2}$ x द्रव्यमान x (चाल)^2

माना की एक वस्तु u वेग से θ कोण पर प्रक्षेपित की जाती है।

इस प्रकार प्रक्षेप्य की प्रारम्भिक गतिज ऊर्जा, $K_0 = \frac{1}{2}mu^2$

चूंकि प्रक्षेप्य का अधिकतम ऊँचाई पर वेग $u\cos\theta$ है। अतः उच्चतम बिन्दु पर गतिज ऊर्जा

$K_h max = \frac{1}{2}mu^2\cos^2\theta = K_0\cos^2\theta$

जो कि सम्पूर्ण गति के दौरान न्यूनतम गतिज ऊर्जा है।

- अधिकतम ऊँचाई पर, $v_y = 0$ तथा $v_x = u_x = u\cos\theta$ अतः अधिकतम ऊँचाई पर $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$
- अधिकतम ऊँचाई पर वेग एवं त्वरण में कोण 90° होता है।
- 'h' ऊँचाई पर वेग का परिमाण

ऊंचाई h पर वेग का लंबवत घटक

$v_y^2 = u_y^2 - 2gh \quad \Rightarrow \quad v_y^2 = (u\sin\theta)^2 - 2gh$

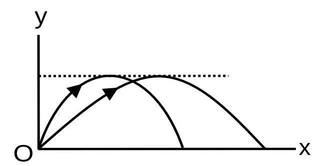
ऊँचाई h पर वेग का क्षैतिज घटक

$v_x = u\cos\theta \quad \Rightarrow \quad |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{u^2\cos^2\theta + (u^2\sin^2\theta - 2gh)} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{u^2 - 2gh}$

➢ $T = \frac{2u_y}{g}$; $H = \frac{u_y^2}{2g}$; $R = \frac{2u_x u_y}{g}$

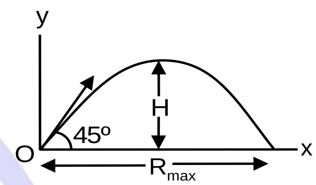
अर्थात T तथा H का मान प्रारम्भिक उर्ध्वचाल u_y पर निर्भर करता है।

➢ यदि समान उड्डयन काल एवं समान उर्ध्वचाल वाले दो प्रक्षेप्य भिन्न दिशाओं में फैंके जाते हैं तो उनके द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई भी समान होगी।



यदि $H_A = H_B$ then $(U_y)_A = (u_y)_B$ और $T_A = T_B$

➢ चित्र में दिखायी गयी स्थिति $\theta = 45^o$ के लिये



Here $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ and $H = \frac{u^2\sin^2 45^o}{2g} = \frac{u^2}{4g}$

$\therefore$ $R_{max} = 4H = 4$(प्राप्त अधिकतम ऊँचाई)

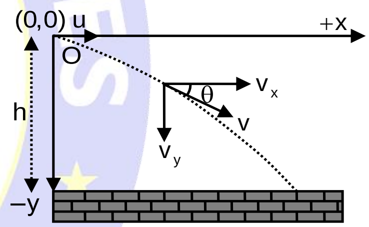
➢ जब $R = H \Rightarrow$ $R = \frac{u^2(2\sin\theta\cos\theta)}{g}$ तथा $H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$

$\Rightarrow \frac{R}{H} = 4\cot\theta = 1 \Rightarrow 4\cot\theta = 1 \Rightarrow \tan\theta = 4 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(4)$

11. ऊँचाई से क्षैतिज प्रक्षेपण (HORIZONTAL PROJECTION FROM HEIGHT):

माना कि धरातल से ऊँचाई h पर स्थित बिन्दु O से एक प्रक्षेप्य को क्षैतिज दिशा में u वेग से फेंका गया है।

अब हम क्षैतिज एवं उर्ध्व दिशाओं की सहायता से प्रक्षेप्य गति के अभिलक्षणों का अध्ययन करते हैं अर्थात्



क्षैतिज दिषा:	ऊर्ध्वाधर दिषा
(i) प्रारम्भिक वेग $u_x = u$	प्रारम्भिक वेग $u_y = 0$
(ii) त्वरण $a_x = 0$	त्वरण $a_y = -g$

11.1 प्रक्षेप्य के पथ का समीकरण :

प्रक्षेप्य द्वारा अनुरेखित पथ को प्रक्षेप्य पथ कहते है। t समय पश्चात् $x = ut$ तथा $y = -\frac{1}{2}gt^2$ यहाँ ऋण चिन्ह उर्ध्वाधर विस्थापन की दिशा को इंगित करता है।

अतः $y = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2} \quad \left(\because t = \frac{x}{u}\right)$

यह प्रक्षेप्य पथ का समीकरण कहलाता है, जो कि परवलय का समीकरण है।

11.2 किसी बिन्दु P (x, y) पर वेग :

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

t समय पश्चात प्रक्षेप्य का क्षैतिज वेग $v_x = u$ (नियत रहता है)

t समय पश्चात प्रक्षेप्य का उर्ध्व दिशा में वेग

$v_y = 0 - (g)t = -gt$ (नीचे की ओर)

$\therefore v = \sqrt{v^2 + g^2t^2}$

तथा $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$ या $\tan\theta = -\frac{gt}{u}$ (ऋणात्मक चिन्ह दक्षिणावर्त दिशा इंगित करता है।)

11.3 विस्थापन :

कण का विस्थापन निम्नानुसार होगा।

$\vec{s} = x\hat{i} + y\hat{j}$

जहाँ $|\vec{s}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \left|(ut)\hat{i} - \left(\frac{1}{2}gt^2\right)\hat{j}\right|$

11.4 उड़ान काल या उड्डयन काल :

उर्ध्व दिशा के लिए गति की द्वितीय समीकरण से

$h = u_y t + \frac{1}{2}$

उच्चतम बिन्दु पर $u_y = 0 \Rightarrow h = gT^2$

$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

11.5 h_1 ऊँचाई से गिरने के बाद वेग:

h_1 ऊचाई गिरने के बाद वेग :— उर्ध्व दिशा के अनुदिश $= 0^2 + 2(h_1)(g)$

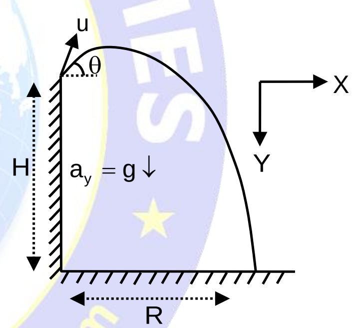
$v_y = \sqrt{2gh_1}$

क्षैतिज दिशा के अनुदिश $v_x = u_x = u$

अतः वेग, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{u^2 + 2gh_1}$

12. एक निश्चित ऊँचाई से तिर्यक प्रक्षेपण (OBLIQUE PROJECTION FROM A CERTAIN HEIGHT):

12.1 क्षैतिज से ऊपर की ओर θ कोण पर किसी ऊँचाई से प्रक्षेपण :



$u_x = u \cos\theta$ $u_y = -u\sin\theta$

$x = (u \cos\theta)\, t$ $a_y = g$

$H = (-u \sin\theta)\, t + \frac{1}{2} gt^2$ $gt^2 - (2u \sin\theta)\, t - 2H = 0$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने के बाद हमें परिणाम प्राप्त होगा।

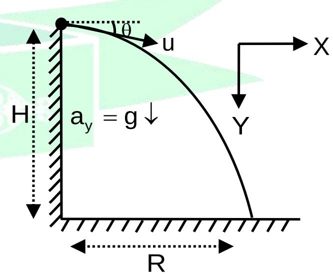
12.2 h ऊँचाई गिरने के बाद वेग:

उर्ध्व दिशा के अनुदिश ; $= (-u\sin\theta)^2 + 2(h)(g)$

क्षैतिज दिशा के अनुदिश, $v_x = u_x = u\cos\theta$;

इसलिए वेग, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{u^2 + 2gh}$

12.3 क्षैतिज से नीचे की ओर θ कोण पर किसी ऊँचाई से प्रक्षेपण :



$u_x = u\cos\theta$ $u_y = u \sin\theta$

$c = (u \cos\theta)\, t$ $a_y = g$

$H = (u \sin\theta)\, t + \frac{1}{2}gt^2$ $gt^2 + (2u \sin\theta)\, t - 2H = 0$

उपरोक्त समीकरणों को हल करने के बाद हमें परिणाम प्राप्त होगा।

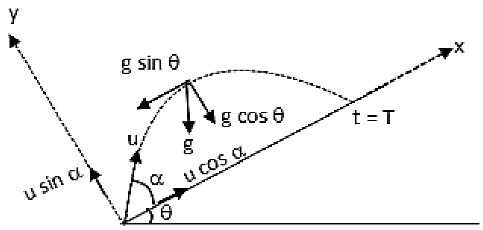
12.4 h ऊँचाई गिरने के बाद वेग :

उर्ध्व दिशा के अनुदिश, क्षैतिज दिशा के अनुदिश, $v_x = u_x = u\cos\theta$;

इसलिए वेग, $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{u^2 + 2gh}$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

12.5 झुकी हुई सतह पर प्रक्षेपण



आनत समतल द्वारा क्षैतिज से बनाया गया कोण = θ

आनत समतल के साथ प्रक्षेपण कोण = α

क्षैतिज के साथ प्रक्षेपण का कोण = α + θ

x – अक्ष के साथ गति y – अक्ष के साथ गति

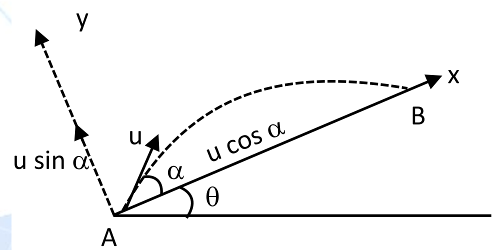
x – अक्ष के साथ गति	y – अक्ष के साथ गति
$u_x = u\cos\alpha$	$u_y = u\sin\alpha$
$a_x = -g\sin\alpha$	$a_y = -g\cos\theta$
	$s_y = 0$

उडड्यन समय के लिए लागू करने पर $s_y = u_y t + 1/2\, a_y t^2$ y दिषा के अनुदिष

$$0 = u\sin\alpha\, t - 1/2\, g\cos\theta\, T^2$$

$$T = 0,\ \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta} \qquad \boxed{T = \frac{2u\sin\alpha}{g\cos\theta}}$$

t = 0 वह समय है जब प्रक्षेप्य प्रक्षेपित करते समय कण प्रक्षेपण के बिंदु पर होता है AB ज्ञात करने के लिए (झुके हुए तल विमान के साथ सीमा) x अक्ष के साथ गति कि समीकरण लागू करें



$s_x = u_x T + 1/2\, a_x T^2$

$$s_x = u\cos\alpha\, T - \frac{1}{2}\, g\sin\theta\, T^2 = uT\left[\cos\alpha - \frac{g\sin\theta}{2}\frac{2u\sin\alpha}{ug\cos\theta}\right]$$

$$AB = uT\left[\frac{\cos\alpha\cos\theta - \sin\theta\sin\alpha}{\cos\theta}\right]$$ T का मान डालने पर हमें AB (श्रेणी) प्राप्त होता है

$$AB\ (\text{परास})\ \frac{2u^2[\cos(\theta+\alpha)\sin\alpha]}{g\cos^2\theta}$$

SOLVED EXAMPLES

Example 48: पिंड के प्रक्षेपवक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि कण की स्थिति सदिश इस प्रकार दी गई हो।

(i) $r = at\hat{i} - bt^2\hat{j}$ (ii) $\vec{r} = a\sin\omega t\,\hat{i} - a\cos\omega t\,\hat{j}$

(iii) $\vec{r} = 3\sin\omega t\,\hat{i} + 4\cos\omega t\,\hat{j}$ (iv) $\vec{r} = 2\sin\omega t\,\hat{i} - 3\sin\omega t\,\hat{j}$

Solution: (i) x = at तथा $y = -bt^2$ समीकरणों को हल करने पर $y = -\frac{bx^2}{a^2}$ पिंड का पथ–परवलय

(ii) $x = a\sin\omega t,\ y = -a\cos\omega t \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ पिंड का पथ–वृत्ताकार

(iii) $x = 3\sin\omega t,\ y = 4\cos\omega t \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$: पिंड का पथ–अंडाकार

(iv) $x = 2\sin\omega t,\ y = -3\sin\omega t \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x$ पिंड का पथ–सरल रेखा

Example 49: t = 0 समय पर एक प्रक्षेप्य को धरातल से θ कोण पर u चाल से फेंका जाता है। यह क्रमशः t = 1s व t=3s क्षणों पर समान ऊँचाई के बिन्दुओ से गुजरता है। कण द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई की गणना किजिए। ($g = 10\ m/s^2$)

(1) 4 m (2) 12 m (3) 16 m (4) 20 m

Solution: y दिशा में विस्थापन

$y = u_y \times 1 - \frac{1}{2}g \times (1)^2 = u_y \times 3 - \frac{1}{2}g(3)^2$ $\Rightarrow u_y = 2g = 20$ m/s

प्राप्त अधिकतम ऊँचाई $h_{max} = \frac{u_y^2}{2g} = 20$m.

Example 50: एक पत्थर को इस प्रकार फेंकते हैं कि यह 3 m की क्षैतिज दूरी तय करता है यदि प्रक्षेप्य का वेग 7 m/s है तो ज्ञात कीजिए,

(i) इसे कितने कोण पर फेंका जाना चाहिए।

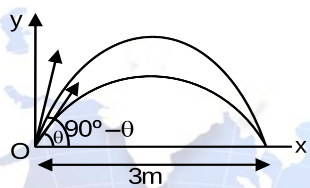
(1) 18.5° (2) 37° (3) 71.5° (4) Both (1) and (3)

(ii) 7 m/s की प्रक्षेपण चाल से सम्भव अधिकतम क्षैतिज विस्थापन।

(1) 3 m (2) 5 m (3) 8 m (4) 10 m

Solution: (i) परास $R = \frac{u^2}{g}\sin 2\theta$

$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{gR}{u^2} = \frac{9.8 \times 3}{(7)^2} = 0.6 = \sin 37^o$



$\Rightarrow 2\theta = 37^o \Rightarrow \theta = 18.5^o$

प्रक्षेपण कोण यह भी हो सकता है। $90^o - 18.5^o = 71.5^o$

(ii) अधिकतम क्षैतिज विस्थापन के लिये $\theta = 45^o$ अतः

$R_{max} = \frac{u^2}{g} = \frac{(7)^2}{9.8} = \frac{49}{98} \times 10 = 5m$.

Example 51: दो परवलयों की क्षैतिज से (θ) और $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ कोण पर समान चाल 20 m/s से प्रक्षेपित करते हैं तथा इनमें से एक, दूसरे के सापेक्ष 10 m ऊँचाई तक पहुँचता है तो दोनो के प्रक्षेपण कोणों का मान ज्ञात करो। ($g = 10$ m/s^2 लेवें)

(1) 37°, 53° (2) 30°, 60° (3) 25°, 55° (4) 18.5°, 71.5°

Solution: अधिकतम ऊँचाई $H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$

$\Rightarrow h_1 = \frac{(20)^2 \sin^2\theta}{2g} = 20\sin^2\theta$

एवं $h_2 = \frac{(20)^2 \sin^2(\pi/2 - \theta)}{2g} = 20\cos^2\theta$

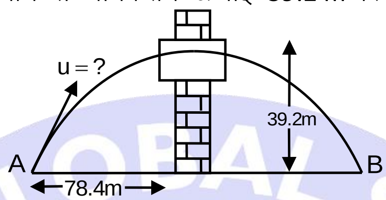
$h_2 - h_1 = 20 [\cos^2\theta - \sin^2\theta] = 10$

$\Rightarrow \; 20 \cos 2\theta = 10 \Rightarrow \cos 2\theta = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \; 2\theta = 60^o \Rightarrow \theta = 30^o$

तथा $\theta' = 90^o - \theta = 60^o$

Example 52: एक लड़का किसी मकान से 78.4 m की दूरी परी खड़ा है एवं एक गेंद को ठीक उस मकान की खिड़की से मकान में फेकता है। जो जमीन से अधिकतम ऊँचाई 39.2 m पर है। गेंद का प्रक्षेपण वेग ज्ञात कीजिए।



(1) 19.8 m/s (2) 39.2 m/s (3) 54.6 m/s (4) 24.4 m/s

Solution : अधिकतम ऊँचाई = $\frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$ m....(i)

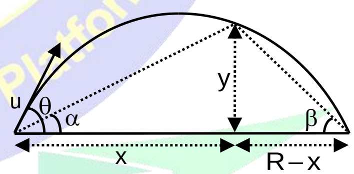
परास = $\frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{2u^2 \sin 2\theta \cos\theta}{g} = 2 \times 78.4$ ....(ii)

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से भाग देने पर $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^o$

समीकरण (ii) में मान रखने पर परास = $\frac{u^2 \sin 90^o}{g} = 2 \times 78.4 \Rightarrow u = \sqrt{2 \times 78.4 \times 9.8} = 39.2$ m/s

Example 53: एक त्रिभुज के क्षैतिज आधार के एक सिरे से एक कण को इस तरह फेंका जाता है कि यह इसके शीर्ष को छूता हुआ इसके आधार के दूसरे सिरे पर जाकर गिरता है। यदि त्रिभुज के आधार कोण α व β है तथा प्रक्षेपण कोण θ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = \tan\alpha + \tan\beta$.

Solution: त्रिभुज से $y = x \tan\alpha$ तथा $y = (R-x)\tan\beta$



$\tan\alpha + \tan\beta = \frac{y}{x} + \frac{y}{R-x} = \frac{yR}{x(R-x)}$

$\because y = x\tan\theta\left[1 - \frac{x}{R}\right] \Rightarrow \tan\theta = \frac{yR}{x(R-x)}$

$\therefore \; \tan\theta = \tan\alpha + \tan\beta$

Example 54: एक कण को धरातल से किसी कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है। फैंकने के t_1 समय बाद कण अपने मार्ग में खड़े एक खम्बे के शीर्ष को स्पर्श करता है तथा अगले t_2 समय बाद यह धरातल पर पहुँचता है। खम्भे की ऊँचाई कितनी है ?

(1) $\frac{1}{2}g(t_1+t_2)$ (2) $\frac{1}{4}g\sqrt{t_1+t_2}$ (3) $\frac{g}{2}(t_1+t_2)^{1/2}$ (4) $\frac{1}{2}gt_1t_2$

Solution खम्भे की ऊँचाई t_1 समय पर उर्ध्वाधर विस्थापन के बराबर होगी।

उर्ध्वाधर विस्थापन $y = u_y t_1 + \frac{1}{2} g t_1^2$ .....(i)

तथा कुल उड्डयन काल $t_1 + t_2 = \frac{2u_y}{g} \Rightarrow u_y = \frac{g}{2}(t_1+t_2)$

u_y का मान समीकरण (i) में रखने पर $y = \frac{g}{2}(t_1 + t_2)\,t_1\,\frac{1}{2} - g(t_1)^2 = \frac{1}{2}g t_1 t_2$

इसलिए खम्भे की ऊँचाई = $\frac{1}{2}g t_1 t_2$ के बराबर होगी।

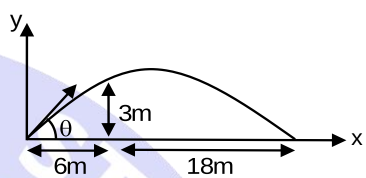
Example 55: एक गेंद को धरातल से 6 m दूर स्थित 3 m ऊंची दीवार को पार करने के लिये फेंकते हैं तथा गेंद दीवार से 18 m दूर गिरती है। गेंद का प्रक्षेपण कोण होगा।

(A) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$ (B) $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (C) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (D) $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

Solution:

प्रक्षेप्य की समीकरण $y = x\tan\theta\left[1 - \frac{x}{R}\right]$

$\Rightarrow 3 = 6\tan\theta\left(1 - \frac{6}{24}\right) \Rightarrow \tan\theta = \frac{2}{3}$



Example 56: एक कण $v = a\hat{i} + b\hat{j}$ वेग से प्रेक्षित किया जाता है, तो परास ऊँचाई तथा कण का उड्डयन काल ज्ञात कीजिए ।

Solution: क्षैतिज वेग $= v_x = a$

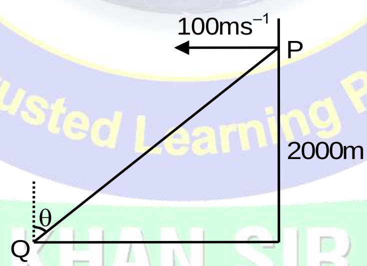
ऊर्ध्वाधर वेग $= v_y = b$

तब उड्डयन काल $= \frac{2b}{g}$

प्रक्षेपण की परास $= \frac{2b}{g} \times a = \frac{2ab}{g}$

प्रक्षेपण की अधिकतम ऊँचाई $= b^2 = 2gh \qquad \Rightarrow h = \frac{b^2}{2g}$

Example 57: एक हवाई जहाज धरातल से 2000m की ऊँचाई पर क्षैतिज दिशा में उड़ रहा है। जब यह बिन्दु P पर होता है, तो धरातल पर एक स्थिर लक्ष्य Q पर प्रहार करने के लिए यह एक बम को गिराता है। बम के लक्ष्य पर ठीक गिरने के लिए PQ रेखा का उर्ध्व रेखा के साथ कोण θ कितना होना चाहिए। [$g = 10 ms^{-2}$]



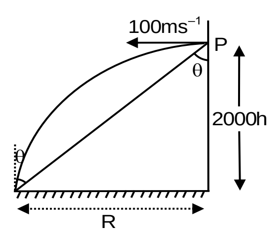
(1) 37° (2) 30° (3) 45° (4) 53°

Solution: मानाकि बम को लक्ष्य से टकराने में लगा समय = t है तो

$h = 2000 = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = 20s$

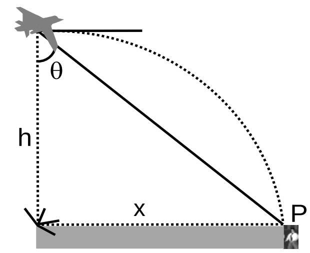
$R = ut = (100)(20) = 2000$ m

$\tan\theta = \frac{R}{h} = \frac{2000}{2000} = 1 \Rightarrow \theta = 45^o$



Example 58: एक बचाव दल का हवाई जहाज बाढ के पानी में घिरे हुए व्यक्ति के ठीक ऊपर 1960 m नियत ऊँचाई पर 600 km/h चाल से उड़ रहा है। उर्ध्व से दृष्टि के किस कोण पर पायलट को बचाव किट गिराना चाहिये ताकि यह पानी में घिरे व्यक्ति तक पहुंच सके ? ($g = 9.8\ m/s^2$)

(1) 60° (2) 30°
(3) 45° (4) 90°



Solution: वायुयान की उड़ान चाल = $600 \times \frac{5}{18} = \frac{500}{3}$ m/s क्षैतिज दिशा में (1960 m ऊँचाई पर कीट (kit) को जमीन तक पहुँचाने में लगा समय

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 1960}{9.8}} = 20\ s$$

इस समय में किट द्वारा तय क्षैतिज दूरी $x = ut = \frac{500}{3} \times 20 = \frac{10,000}{3}$ m

अतः $\tan\theta = \frac{x}{h} = \frac{10,000}{3 \times 1960} = \frac{10}{5.88} = 1.7 = \sqrt{3}$

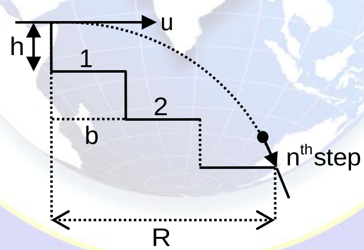
या $\theta = 60^o$

Example 59: एक गेंद क्षैतिज वेग u से सीढ़ियों के शीर्ष से लुढ़कती हैं प्रत्येक सीढ़ी की ऊँचाई h तथा चौड़ाई b है यदि गेंद n वीं सीढ़ी के ठीक किनारे पर पहुँचती है तो n का मान ज्ञात कीजिये।

(1) $\frac{2hu^2}{gb^2}$ (2) $\frac{hu^2}{gb^2}$ (3) $\frac{gb^2}{2hu^2}$ (4) $\frac{gb^2}{hu^2}$

Solution: यदि गेंद n वीं सीढ़ी पर टकराती है तो क्षैतिज एवं उर्ध्व दिशा में तय की गई दूरियां क्रमशः nb तथा nh होगी। माना कि इन क्षैतिज व उर्ध्व विस्थापनों में t समय लगता है। क्षैतिज दिशा में u वेग नियत रहता है। प्रारम्भिक उर्ध्व वेग शून्य है।

$nb = ut$ तथा $nh = 0 + \frac{1}{2}gt^2$



समी. (1) से t विलोपित करने पर

$$nh = \frac{1}{2}g\left(\frac{nb}{u}\right)^2 \Rightarrow n = \frac{2hu^2}{gb^2}$$

Example 60: एक कण को किसी टॉवर के शीर्ष से क्षैतिज दिशा में 20 m/s की चाल से प्रक्षेपित किया जाता है। कितने समय पश्चात कण का वेग प्रारम्भिक प्रक्षेपण वेग से 45° कोण पर होगा? [$g = 10\ ms^{-2}$ मानें]

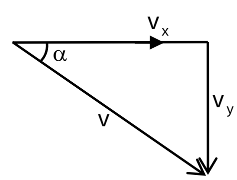
(1) 1 s (2) 2 s (3) 4 s (4) 6 s

Solution माना क्षैतिज दिशा x व उर्ध्वाधर नीचे की ओर y दिशा है।

t समय बाद $v_x = u_x = 20\ ms^{-1}$,

y दिशा में वेग :

$v_y = u_y + a_yt = 0 + gt = gt$



तो $\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{20}$ = if $\alpha = 45^o$

तो $1 = \frac{10t}{20} \Rightarrow t = 2s$

Example 61 चित्र में खंभे से प्रक्षेपण दिखाया गया है ज्ञात कीजिए

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform

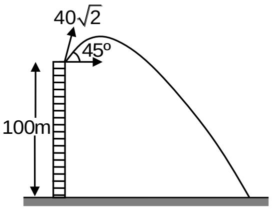
(i) उड्डयन काल,

(ii) क्षैतिज परास,

(iii) धरातल से प्राप्त अधिकतम ऊँचाई,

(iv) टकराने की चाल

$(g = 10\ m/s^2)$



Solution (i) ऊर्ध्वाधर दिशा में $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ उपयोग करते हुए

$$-100 = 40(T) + \frac{1}{2}(-10)T^2$$

$\Rightarrow T^2 - 8T - 20 = 0 \Rightarrow T = 10\ s$

(ii) क्षैतिज परास

$R = u_x T = (40)\ (10) = 400\ m$

(iii) अधिकतम ऊँचाई $= 100 + \frac{u_y^2}{2g} = 100 + \frac{(40)^2}{2(10)} = 180\ m$

(iv) टकराव चाल $v = \sqrt{u^2 + 2gh} = \sqrt{(40\sqrt{2})^2 + 2(10)(100)} = 20\sqrt{13}\ m/s$

आपेक्षिक गति (RELATIVE MOTION):

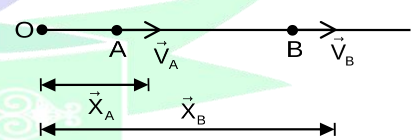
13. निर्देश तंत्र:

यह वह स्थान होता है। जहाँ से अवलोकन किया जाता है या वह स्थान जहाँ से गति के मापदण्ड (दूरी, विस्थापन, वेग, त्वरण, ऊर्जा, बल आदि) में कोई परिवर्तन देखा जाता है।

- प्रेक्षक को उस स्थान के सदर्भ में विरामावस्था में होना चाहिए।
- "निर्देश तंत्र" शब्द केवल प्रेक्षक के लिए है, इसलिए इसका वस्तु से कोई लेना–देना नहीं है।
- एक चलती ट्रेन के अंदर बैठा एक आदमी खुद को ट्रेन के ऊपर अपनी सीट को अपना "निर्देश तंत्र" कह सकता है क्योंकि उसी ट्रेन के अंदर चलने वाला एक अन्य व्यक्ति ट्रेन को अपना "संदर्भ का ढांचा" नहीं कह सकता क्योंकि वह ट्रेन के संबंध में विराम मे नही है।

13.1 एकविमीय आपेक्षिक वेग (RELATIVE VELOCITY ONE DIMENSION) :

जब हम कण की गति को मानते है। का अध्ययन करते हैं तब हम एक नियत बिन्दु मानते है जिसके सापेक्ष कण गति में है। उदाहरण के लिए, यदि हम कहे कि पानी बह रहा है या पवन चल रही है, तो हम यह मानते हैं कि पृथ्वी के सापेक्ष है।



B का A के सापेक्ष विस्थापन = [A से B का मापा गया विस्थापन]

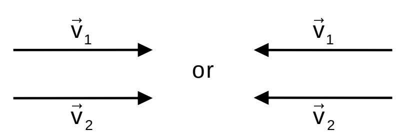
$\Rightarrow \quad \vec{x}_{BA} = \vec{x}_B - \vec{x}_A \Rightarrow \quad \frac{d\vec{x}_{BA}}{dt} = \frac{d\vec{x}_B}{dt} - \frac{d\vec{x}_A}{dt}$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ आपेक्षिक = वास्तविक - प्रेक्षक

13.2 जब समान निर्देश तंत्र में गति हो :

- **समान दिशा में गति के लिये (For same direction) :**

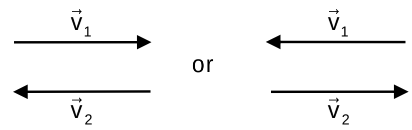
यदि दो कण एक ही दिशा में गतिमान हो तो उनके आपेक्षिक वेग का परिमाण दोनों के चालों के अन्तर के बराबर होता है।



$|\vec{v}_{12}|$ or $|\vec{v}_{21}| = v_1 - v_2$

- **विपरीत दिशा में गति के लिये (For opposite directions) :**

जब दो कण विपरीत दिशा में गतिमान हो तो उनके आपेक्षिक वेग का परिमाण दोनों कणों कि चाल के योग के बराबर होता है।

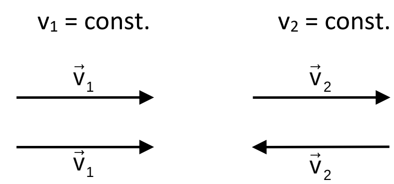


$|\vec{v}_{12}|$ or $|\vec{v}_{21}| = v_1 + v_2$

नोट- जब दो कण एक ही क्षण पर गति करना प्रारम्भ करे तो हम आपेक्षिक गति के सिद्धांत का प्रयोग करते हैं।

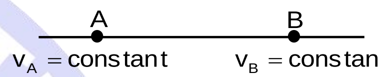
13.3 आंकिक अनुप्रयोग (Numerical Applications)

- यदि दो कण सरल रेखा में नियत चाल से इस प्रकार गतिमान हो कि उनका आपेक्षिक त्वरण शून्य हो तो उनका आपेक्षिक वेग, आपेक्षिक विस्थापन तथा समय के अनुपात के बराबर होता है।



जब $a_{rel.} = 0$

- यदि दो कण इस प्रकार गतिमान हो कि उनका आपेक्षिक त्वरण अशून्य हो तो हम आपेक्षिक गति के समीकरणों का उपयोग करते हैं।



$a_A = 0$ $\qquad$ $a_B = a$

$a_{AB} = a_A - a_B$ $\qquad$ $a_{AB} = 0 - a = -a$ = constant

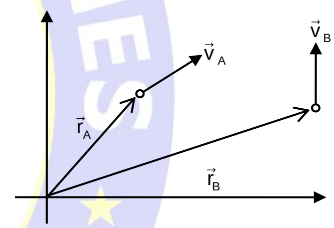
गति के समीकरण (आपेक्षिक गति के लिए) (Equation of Motion (Relative))

- $v_{rel.} = u_{rel.} + a_{rel.}t$
- $s_{rel.} = u_{rel.}t + \frac{1}{2}a_{rel.}t^2$
- $v_{rel.}^2 = u_{rel.}^2 + 2a_{rel.}s_{rel.}$
- $s_{rel.} = \frac{1}{2}(u_{rel.} + v_{rel.})t$

13.4 समतल में आपेक्षिक वेग (RELATIVE VELOCITY IN A PLANE)

- **द्विविमीय गति के लिये:**

A का आपेक्षिक वेग 'B' के सापेक्ष निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है



$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

$\Rightarrow |\vec{v}_{AB}| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_Av_B\cos\theta}$

13.5 दो कणों के मिलने की स्थिति (टक्कर) में :

- सापेक्ष विस्थापन शून्य होता है।
- उनके उर्ध्वाधर वेग समान होंगें (यदि वे समान स्तर से प्रक्षेपित किये गये हों) (प्रक्षेप्य की स्थिति में)
- उनकी संयुक्त गति का, एकविमिय गतियों में परिवर्तित किया जा सकता है।

13.6 एक प्रक्षेप्य का दूसरे प्रक्षेप्य के सापेक्ष पथ :

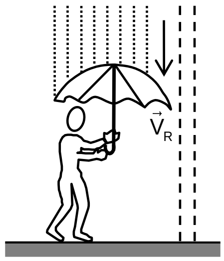
दो प्रक्षेप्य जमीन से विभिन्न वेगों से विभिन्न कोणों पर फेके जाते है। दोनों प्रक्षेप्यों के त्वरण समान है अतः उनका सापेक्ष त्वरण शून्य होगा। इस प्रकार एक प्रक्षेप्य का पथ दूसरे के सापेक्ष सरल रेखा होगा तथा एक प्रक्षेप्य की गति दूसरे के सापेक्ष समरूप होगी।

- यदि $u_1\cos\theta_1 = u_2\cos\theta_2$ तब सापेक्ष पथ उर्ध्वाधर रेखा होती है।
- यदि $u_1\sin\theta_1 = u_2\sin\theta_2$ तब सापेक्ष पथ क्षैतिज रेखा होती है।

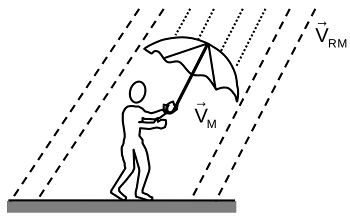
14. वर्षा–व्यक्ति सम्बंधित प्रश्न (RAIN-MAN PROBLEM):

(i) यदि वर्षा उर्ध्वाधर नीचे की ओर $\vec{v}_R$ वेग से गिर रही है तथा व्यक्ति वेग $\vec{v}_M$ से क्षैतिज दिशा में गतिमान है तो मनुष्य के सापेक्ष वर्षा का वेग

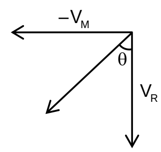
KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

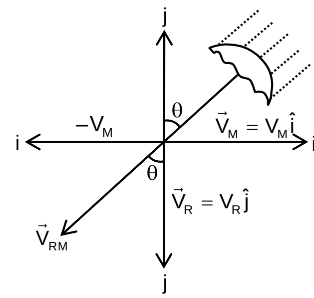


जब आदमी स्थिर है–



(जब आदमी गतिशील है)





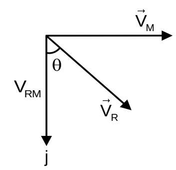
$\vec{v}_{RM} = \vec{v}_R - \vec{v}_M \;\Rightarrow \vec{v}_{RM} = -\vec{v}_R\hat{j} - \vec{v}_M\hat{i}$

सदिश योग के नियमानुसार v_{RM} का परिमाण होगा

$v_{RM} = \sqrt{v_R^2 + v_M^2}$

$\vec{v}_{RM}$ की दिशा इस प्रकार होगी कि यह उर्ध्वाधर के साथ θ कोण बनाये अर्थात् $\theta = \tan^{-1}(v_m/v_R)$

(ii) यदि वर्षा उर्ध्वाधर से θ कोण पर $\vec{v}_R$ वेग से गिर रही है तथा क्षैतिज दिशा में $\vec{v}_M$ वेग से गतिमान व्यक्ति को वर्षा की बूंदे उर्ध्वाधर नीचे की ओर गिरती हुई प्रतीत होती है।



यहाँ $\vec{v}_{RM} = \vec{v}_R - \vec{v}_M \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{RM} = (v_R \sin\theta - v_M)\,\hat{i} - v_R\cos\theta\,\hat{j}$

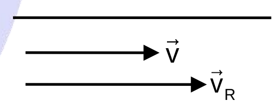
यदि व्यक्ति अनुभव करता है कि वर्षा की बूंदे उर्ध्वाधर नीचे की ओर गिर रही है तो यह तभी सम्भव है जब $\vec{v}_{RM}$ का क्षैतिज घटक शून्य हो

$v_R \sin\theta - v_M = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{v_M}{v_R}$ तथा $|\vec{v}_{RM}| = v_R\cos\theta = v_R\sqrt{1-\sin^2\theta} = v_R\sqrt{1-\frac{v_M^2}{v_R^2}} \Rightarrow v_{RM} = \sqrt{v_R^2 - v_M^2}$

15. नदी–नाव (या व्यक्ति) प्रश्न (RIVER-BOAT (OR MAN) PROBLEM):

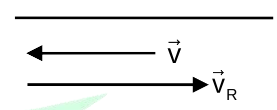
एक व्यक्ति $\vec{v}$ वेग से तैर सकता है अर्थात् यह व्यक्ति का स्थिर पानी के सापेक्ष वेग है।

यदि पानी भी $\vec{v}_R$ वेग से बह रहा है, तो व्यक्ति का जमीन के सापेक्ष वेग $\vec{v}_m = \vec{v} + \vec{v}_R$



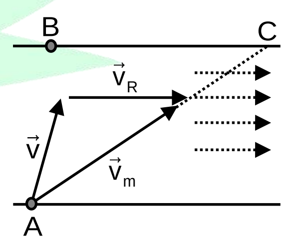
(i) यदि व्यक्ति पानी के बहने की दिशा में अर्थात् नदी प्रवाह के अनुदिश तैर रहा है तो

$v_m = v + v_R$



(ii) यदि व्यक्ति पानी के बहने की दिशा के विपरित अर्थात् नदी प्रवाह के विपरित तैर रहा है तो

$v_m = v - v_R$



(iii) यदि व्यक्ति नदी पार कर रहा है, अतः $\vec{v}$ व $\vec{v}_R$, एक रेखा में नहीं है तो सदिश बीज गणित का प्रयोग करना होगा। $\vec{v}_m = \vec{v} + \vec{v}_R$

15.1 नदी को पार करने पर :

नदी को पार करने पर

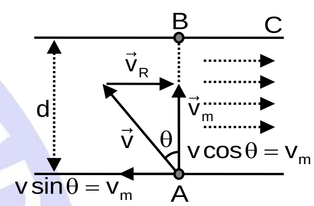
- दृष्टि कोण की न्यूनतम दूरी
  या
  नदी पार करने में सबसे छोटा संभव पथ
  या
  नदी पार करके शुरूवाती पथ के ठीक सामने एक बिन्दु पर पहुचे।
- दृष्टि कोण का न्यूनतम समय
  या
  नदी पार करने में छोटा पथ

➢ **न्यूनतम लम्बाई के पथ के लिये (For shortest path):**

यदि व्यक्ति नदी को इस प्रकार पार करना चाहता है कि उसका विस्थापन न्यूनतम रहना चाहिए, अर्थात् वह नदी के पार ठीक सामने वाले बिन्दु पर पहुंचना चाहता है।

व्यक्ति को नदी के प्रवाह के अभिलम्ब से θ कोण पर प्रवाह के विपरीत तैरना चाहिए, ताकि परिणमी वेग $\vec{v}_M = (\vec{v} + \vec{v}_R)$.

इसकी AB विस्थापन में दिषा

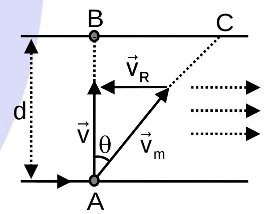


B पर पहुचने पर $v\sin\theta = v_R \Rightarrow \sin\theta = \frac{v_R}{v}$

यदि AB के अनुदिश वेग का घटक $v\cos\theta$ हो तो लिया गया समय $t = \frac{d}{v\cos\theta} = \frac{d}{\sqrt{v^2 - v_R^2}}$

➢ **न्यूनतम समय के लिये (For minimum time):**

नदी को न्यूनतम समय में पार करने के लिये AB की दिशा में वेग ($v\cos\theta$) अधिकतम होना चाहिए। यह सम्भव है यदि $\theta = 0°$, अर्थात जल प्रवाह के लम्बवत तैरना प्रारम्भ करना चाहिए। नदी के वेग के प्रभाव के कारण व्यक्ति परिणामी वेग से बिन्दु C पर पहुंचेगा। अतः उसका विस्थापन न्यूनतम नहीं होगा परन्तु नदी को पार करने में लिया गया समय न्यूनतम होगा वह $t_{min} = \frac{d}{v}$ है। समय में तैराक नदी की दिशा में, नदी की चाल $\overrightarrow{V_R}$ से BC दूरी तय करता है।



समय में t_{min} तैराक नदी की गति के साथ नदी के साथ BC की दूरी तय करता है $\overrightarrow{V_R}$ नदी के प्रवाह के साथ तय की गई दूरी (मनुष्य का बहाव) है।

SOLVED EXAMPLES

Example 62: दो बसें A व B समान दिशा में क्रमशः 20 m/s तथा 15 m/s की चाल से गतिशील है। B के सापेक्ष A का आपेक्षिक वेग तथा A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग ज्ञात कीजिए ।

Solution: माना कि x- अक्ष के अनुदिश बस की गति की दिशा है

तो $\vec{v}_A = (20m/s)\hat{i}$ and $\vec{v}_B = (15m/s)\hat{i}$

(i) B के सापेक्ष A का आपेक्षिक वेग

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$ =(A का वास्तविक वेग) - (B का वेग)

= $(20m/s)\hat{i} - (15 m/s)\hat{i}$ = $5 m/s\,\hat{i}$

अर्थात् B के सापेक्ष A 5m/s की चाल से दिशा में गतिशील है।

(ii) A के सापेक्ष B का आपेक्षिक वेग

$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ =(B का वास्तविक वेग) - (A का वेग)

= $(15m/s)\hat{i} - (20m/s)\hat{i} = (-5m/s) = (5m/s)(-\hat{i})$

अर्थात A के सापेक्ष B, - दिशा में 5 m/s की चाल से गतिशील है।

Example 63: हाइवे पर 30 km/h चाल से गतिशील पुलिस वेन, उसी दिशा में 190 km/h चाल से उसके आगे जा रही चोर की कार पर गोली चलाती है। यदि गोली की नली से निकलने पर नली की सापेक्ष चाल 150 m/s है, तो चोर की कार के सापेक्ष गोली की चाल ज्ञात कीजिये।

(1) 760 km/hr (2) 540 km/hr (3) 380 km/hr (4) 190 km/hr

Solution: $v_b \rightarrow$ गोली का वेग

$v_p \rightarrow$ पुलिस वेन का वेग

$v_t \rightarrow$ चोर की कार का वेग

$v_{bp} = v_b - v_p \Rightarrow \quad v_{bp} = 150 \times \frac{18}{5} = 540$ km/hr

$v_b = v_{bp} + v_p = 540 + 30 = 570$ km/hr

$v_{bt} = v_b - v_t = 570 - 190 = 380$ km/hr.

Example 64: दिल्ली अम्बाला से 200 km दूर है। कार A, अम्बाला से 30 km/h चाल से रवाना होती है तथा कार B उसी समय दिल्ली से 20 km/h की चाल से रवाना होती है। वे एक दूसरे से कब मिलेगी और मिलान बिन्दु की अम्बाला से दूरी कितनी होगी ?

(1) 1 hr, 60 km (2) 2 hr, 120 km

(3) 6 hr, 240 km (4) 4 hr, 120 km

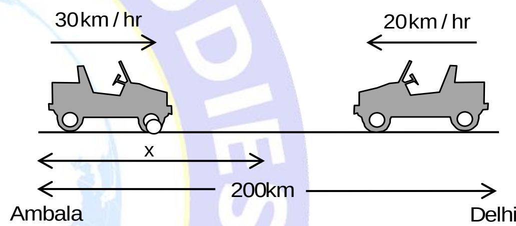
Solution: $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = 30 - (-20) = 50$ km/hr

दोनो कारें t समय बाद मिलती है तो

दिया गया है $t = \frac{s}{v_{AB}} = \frac{200}{50} = 4$hr

अंबाला से वह दूरी जहां दोनो कारें मिलेगी

$x = 30 \times 4 = 120$ km



Example 65: तीन लड़के A, B व C, t =0 पर d भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के कोनों पर स्थित है। प्रत्येक लड़का नियत चाल v से गति करता है। A हमेशा B की ओर, B हमेशा C की ओर तथा C हमेशा A की ओर गति करता है। वे एक दूसरे से किस समय पर तथा कहां मिलते हैं ?

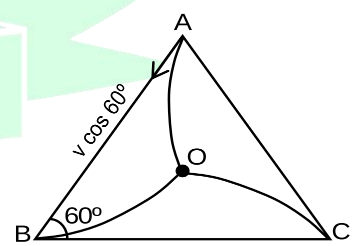
(1) $\frac{d}{3v}$ (2) $\frac{2d}{v}$

(3) $\frac{2d}{3v}$ (4) $\frac{3d}{4v}$

Solution: सममिती के आधार पर त्रिभुज के केन्द्रक पर मिलेंगें। A व B का एक दूसरे की ओर पहुंच का वेग v + v cos 60º होगा ओर वे जब मिलते हैं तब d दूरी तय कर लेते हैं।

परस्पर मिलने में लगा समय

$$\therefore t = \frac{d}{v + v\cos 60^\circ} = \frac{d}{v + \frac{v}{2}} = \frac{2d}{3v}$$



Example 66: दो कार एक सीधे रोड़ पर क्रमशः 10 m/sec तथा 12 m/sec के वेग से एक दूसरे की ओर गति कर रही है। जब इन दोनो कारों के मध्य 150 m की दूरी होती है तब दोनों चालक अपनी कार के ब्रेक लगाते हुए $2 m/sec^2$ मन्दन तब तक देते हैं, जब तक कि ये रूक नहीं जाती है। रूकने के बाद दोनों कार के मध्य कितनी दूरी होगी?

(1) 61 m (2) 150 m (3) 89 m (4) 36 m

Solution: माना मंदन के अन्तर्गत रूकने से पहलें कारों द्वारा चली गई दूरी क्रमशः x_1 तथा x_2 है।

समीकरण $v^2 = u^2 + 2as$, $\Rightarrow 0 = (10)^2 - 2 \times 2\, x_1 \Rightarrow x_1 = 25m$

तथा $0 = (12)^2 - 2 \times 2x_2 \Rightarrow x_2 = 36$ m

दोनो कारों द्वारा चली कुल दूरी $= x_1 + x_2 = 25 + 36 = 61m$

दोनों कारों के बीच की दूरी जब वह रूक जाती है $= 150 - 61 = 89$ m.

Example 67: दो रेलगाडीयाँ A तथा B, 100 km की दूरी पर एक दूसरे की तरफ अलग अलग पथ पर 50 km/h की चाल से चलती है। रेलगाडी A 20 km/h² से त्वरित है तथा रेलगाडी B, 20 km/h² से मंदित होती है। तब रेलगाडी A द्वारा तय की गई दूरी जब वह एक दूसरी को पार करती है।

(1) 45 km (2) 55 km (3) 65 km (4) 60 km

Ans. **(4)**

Solution: आपेक्षिक गति समीकरण से

$s_r = u_r t + \frac{1}{2} a_r t^2 \Rightarrow u_r = 100$ km/hr

$a_r = 0, s_r = 100$

$100 = 100 \times t + 0 \Rightarrow t = 1$ hr

A के द्वारा तय की गई दूरी $S = 50 \times 1 + \frac{1}{2} \times 20 \times (1)^2 = 60$ km

Example 68: दो ट्रेन A व B जिनकी लम्बाईयां क्रमशः 100m तथा 60 m है, समान्तर पटरियों पर विपरित दिशा में गति कर रही है। छोटी ट्रेन का वेग बडी़ ट्रेन के वेग का 3 गुना है। यदि ट्रेन एक दूसरे को पार करने में 4 sec. लेती है तो उनके वेग ज्ञात कीजिए?

(1) $v_A = 20$ m/s, $v_B = 30$ m/s (2) $v_A = 5$ m/s, $v_B = 15$ m/s

(3) $v_A = 10$ m/s, $v_B = 30$ m/s (4) $v_A = 30$ m/s, $v_B = 10$ m/s

Solution: दिया है $v_B = 3v_A$

ट्रेन विपरीत दिशा में चलती है, तब आपेक्षिक वेग

$v_{rel} = \frac{d_{rel}}{\text{समय}} \Rightarrow v_A + v_B = \frac{100+60}{4} = 40 \Rightarrow 4v_A = 40 \Rightarrow v_A = 10$ m/s, $v_B = 3v_A = 30$ m/s

Example 69: एक पत्थर को 80 m मीटर ऊँचे मीनार से फेंका जाता है। उसी क्षण पर दूसरा पत्थर मीनार के पाद से 40 m/s की चाल से फेंका जाता है। कब और कहा पत्थर एक दूसरे को पार करेगे।

(1) At t = 2 s ; h = 30 m (2) At t = 4 s ; h = 60 m

(3) At t = 2 s ; h = 60 m (4) At t = 4 s ; h = 120 m

Solution: यहाँ $S_{rel} = 80$ m,

$u_{rel} = 40$ m/s,

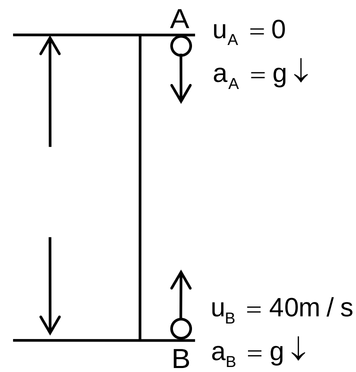
$a_{rel} = 0$ (गुरूत्त्व के अधीन सापेक्ष गति एक समान गति है)

अतः समय $= \frac{S_{rel}}{U_{rel}} = 2$ s

धरातल से ऊँचाई

$H = ut + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow H = 40(2) - \frac{1}{2}g(2)^2 = 60$ m



Example 70: किसी स्थिर लिफ्ट में (जो ऊपर से खुली हुई है) कोई बालक खड़ा है। वह अपने पूरे जोर से एक गेंद ऊपर की ओर फेंकता है। जिसकी प्रारंभिक चाल 49 m s^{-1} है। उसके हाथों में गेंद के वापिस आने में कितना समय लगेगा? यदि लिफ्ट ऊपर की ओर 5 m s^{-1} की एक समान चाल से गति करना प्रारम्भ कर दे और वह बालक फिर गेंद को अपने पूरे जोर से फेंकता है तो कितनी देर में गेंद उसके हाथों में लौट आएगी ?

(1) 6 s (2) 8 s (3) 10 s (4) 16 s

Solution: जब लिफ्ट स्थिर है उड्डयन काल $= \frac{2u}{g} = \frac{2 \times 49}{9.8} = 10$ sec

जब लिफ्ट चल रही है

$S_{rel} = U_{rel}.t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow S_{rel} = 0,$

$\Rightarrow U_{rel} = 49$ m/sec

$0 = 49t - \frac{1}{2} \times 9.8 \times t^2 \Rightarrow t = 10$ sec

Example 71: एक व्यक्ति 6 m/s की चाल से पूर्व दिशा में जा रहा है और यह अनुभव करता है कि हवा दक्षिण की ओर 6 m/s की चाल से बह रही है।

(i) हवा का प्रवाह का वास्तविक वेग ज्ञात कीजिए।

(1) 12 m/s , S-E के अनुदिश (2) 6 m/s , S-E के अनुदिश

(3) $12\sqrt{2}$ m/s, S-E के अनुदिश (4) $6\sqrt{2}$ m/s, S-E के अनुदिश

(ii) यदि व्यक्ति अपना वेग दुगुना कर लेता है तो व्यक्ति के सापेक्ष वायु के प्रवाह का वेग ज्ञात कीजिये।

(1) 12 m/s , S-W के अनुदिश (2) 6 m/s, S-W के अनुदिश

(3) $12\sqrt{2}$ m/s, S-W के अनुदिश (4) $6\sqrt{2}$ m/s, S-W के अनुदिश

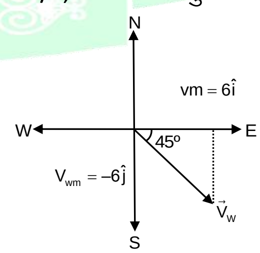
Solution: (i) $\vec{v}_{act} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{ref}$

$\vec{v}_w = \vec{v}_{wm} + \vec{v}_m$

$= -6\hat{i} + 6\hat{j}$

$\Rightarrow \vec{v}_w = 6\hat{i} - 6\hat{j}$

$|\vec{v}| = 6\sqrt{2}$ m/s तथा यह दक्षिण–पूर्व दिशा में बह रही है।



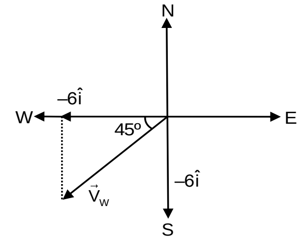
(ii) जब व्यक्ति अपना वेग दुगुना करता है $\vec{v}_m = 12\hat{i}$

परन्तु हवा का वास्तविक वेग अपरिवर्तित रहता है।

$\vec{v}_{wm} = \vec{v}_w - \vec{v}_m = (6\hat{i} - 6\hat{j}) - 12\hat{i}$

$\Rightarrow \vec{v}_{wm} = 6\hat{i} - 6\hat{j}$

व्यक्ति के सापेक्ष हवा का वेग दक्षिण पश्चिम दिशा में $6\sqrt{2}$ m/s है।



Example 72: एक व्यक्ति कार में 20 km/hr के वेग से पूर्व दिशा में गतिशील है, उसे एक ट्रेन $20\sqrt{3}$ km/hr km/hr के वेग से उत्तर दिशा में गति करती हुई प्रतीत होती है तो ट्रेन का वास्तविक वेग एवं गति की दिशा क्या होगी ?

(1) 30 km/hr 60° पूर्व के उत्तर
(2) 45 km/hr 45° पूर्व के उत्तर
(3) 40 km/hr 60° पूर्व के उत्तर
(4) 25 km/hr 30° पूर्व के दक्षिण

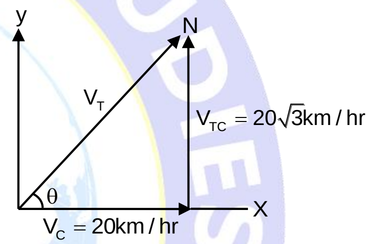
Solution: $\vec{v}_{TC} = \vec{v}_T - \vec{v}_C \Rightarrow \vec{v}_{TC} + \vec{v}_C = 20\sqrt{3}\,\hat{j} + 20\hat{i}$

$|\vec{v}_T| = \sqrt{(20\sqrt{3})^2 + (20)^2}$

$= \sqrt{1600} = 40$ km/hr

$\tan\theta = \frac{20\sqrt{3}}{20} \Rightarrow \theta = 60^\circ$

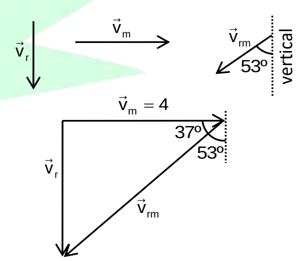
अतः ट्रेन की गति की दिशा 60° N of E or E - 60° - N



Example 73: एक स्थिर व्यक्ति वर्षा की बूंदो को उर्ध्वाधर रूप से गिरता हुआ देखता है। जब वह 4 km/h से चलता है तो वह छाते को उर्ध्वाधर से 53° के कोण पर पकड़ता है। वर्षा की बूंदो का वेग ज्ञात कीजिये।

(1) $\frac{2}{3}$ km/hr
(2) 3 km/hr
(3) $\frac{5}{3}$ km/hr
(4) $\frac{4}{3}$ km/hr

Solution: यहां व्यक्ति के वेग, बारिश का वेग तथा व्यक्ति के सापेक्ष वर्षा के वेग को क्रमशः $\vec{v}_m, \vec{v}_r$ तथा $\vec{v}_{r/m}$ से व्यक्त करते हैं। जिनके मध्य सम्बंध निम्न प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।



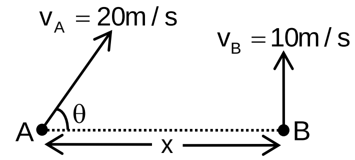
$\vec{v}_r = \vec{v}_m + \vec{v}_{r/m}$

उपरोक्त समीकरण से स्पष्ट है कि स्थिर खड़ा व्यक्ति, वर्षा का वेग $\vec{v}_r$ धरातल के सापेक्ष मापता है तथा जब वह $\vec{v}_m$ वेग से गति कर रहा होता है, तो वर्षा का वेग स्वयं के सापेक्ष $\vec{v}_{r/m}$ मापता है। यह एक सामान्य तथ्य है कि वर्षा से अधिकतम बचाव करने के लिये छाते को $\vec{v}_{r/m}$ की ओर रखना होता है। इन तथ्यों के अनुसार वेग सदिशों की दिशाओं को संलग्न चित्र में दर्शाया गया है। प्रदर्शित वेग सदिश के योग को उपरोक्त समीकरण से भी प्रदर्शित करते हैं।

चित्रानुसार $v_r = v_m \tan 37^\circ = 3$ km/h

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

Example 74: दो कण A व B को धरातल से एक साथ चित्र में दर्शाई गयी दिशा में क्रमशः v_A = 20 m/s व v_B = 10 m/s की प्रारम्भिक चाल से फेके जाते हैं। 0.5 सैकण्ड बाद इनकी टक्कर होती है। कोण θ का मान एवं दूरी x का मान ज्ञात करो।



(1) θ = 30°, x = 5m
(2) θ = 60°, x = $5\sqrt{2}$ m
(3) θ = 30°, x = $5\sqrt{3}$ m
(4) θ = 60°, x = $10\sqrt{3}$ m

Solution: यदि दोनो कण समान समय पर समान ऊंचाई पर होंगे तो उनकी टक्कर होगी।

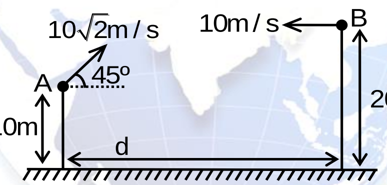
$y_A = y_B \Rightarrow (u_y)_A\, t - \frac{1}{2}gt^2 = (u_y)_B\, t - \frac{1}{2}gt^2$

$\Rightarrow (u_y)_A = (u_y)_B \Rightarrow (v_A \sin\theta) = v_B$

$\Rightarrow 20 \sin\theta = 10 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^o$

A द्वारा 0.5s में तय क्षैतिज दूरी $x = (u_x)_A\, t$ $x = (u_x)_A\, t = (20 \cos 30^o)0.5 = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}m$

Example 75: दो मिनारों से एक साथ चित्रानुसार दो कण प्रक्षेपित किए जाते हैं। उनकी टक्कर के लिए d का मान कितना होना चाहिए।



टक्कर में 'd' का मान होना चाहिए?

(1) 10 m
(2) 16 m
(3) 20 m
(4) 24 m

Solution: यहां A तथा B के मध्य कोई आपेक्षिक त्वरण नहीं है।

इसलिये टक्कर के लिए समय $t = \frac{y_{BA}}{(v_y)_{BA}}$

जहां y_{BA} = B का A के सापेक्ष उर्ध्वाधर विस्थापन = 10 m.

$(v_y)_{BA}$ = B का A के सापेक्ष उध्वार्धर वेग

A = 0 − $(-10\sqrt{2}\sin 45^o)$ = 10 m / s ⇒ t = 10 / 10 = 1s

d = B की A के सापेक्ष तय क्षैतिज दूरी = $(v_x)_{BA}$ x t

A = $(v_x)_{BA}$. t = $(10 + 10\sqrt{2}\cos 45^o)$ × 1 = 20m.

Example 76: दो लड़के एक मैदान के दो किनारों A व B पर इस प्रकार खड़े है कि AB = a है। B पर खड़ा लड़का v_1 वेग से AB के लम्बवत दौड़ना शुरू करता है उसी समय A पर खड़ा लड़का v वेग से दौड़ना प्रारम्भ करता है तथा दूसरे लड़के को t समय में पकड़ लेता है, तो t का मान ज्ञात कीजिए।

(1) $\sqrt{\frac{a}{v - v_1}}$
(2) $\sqrt{\frac{a^2}{v_1^2 + v^2}}$
(3) $\sqrt{\frac{a^2}{v^2 - v_1^2}}$
(4) $\frac{a^2}{v^2 - v_1^2}$

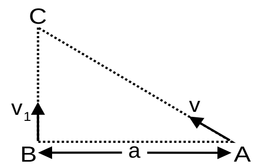
Solution: माना कि दोनो लड़के t समय पश्चात बिन्दु C पर मिलते हैं।

तब $AC = vt$, $BC = v_1t$ परन्तु $(AC)^2 + (BC)^2$

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$\Rightarrow v^2t^2 = a^2 + v_1^2t^2$

$$\Rightarrow t^2\left(v^2 - v_1^2\right) = a^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{a^2}{v^2 - v_1^2}}$$

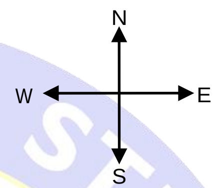


Example 77: दो वस्तुएं A व B 10 km दूरी पर इस प्रकार रखी है कि वस्तु B, A के दक्षिण में है। A व B वस्तुएं समान चाल 20 km/h के साथ क्रमशः पूर्व की ओर तथा उत्तर की ओर गति करती है, तो ज्ञात कीजिए –

(i) A का B के सापेक्ष वेग

(ii) गति के दौरान प्राप्त की गयी न्यूनतम दूरी

(iii) प्रारम्भ से न्यूनतम दूरी प्राप्त करने में लगा समय



Solution: (i) $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = 20\hat{i} - 20\hat{j} = 20 - 20$

$|\vec{v}_{AB}| = 20\sqrt{2}$

(ii) न्यूनतम दूरी $= \dfrac{v_2 \times d}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} = \dfrac{20 \times 10}{20\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$

(iii) न्यूनतम प्रथक्करण में लिया गया समय $= \dfrac{5\sqrt{2}}{20\sqrt{2}} = \dfrac{1}{4} \times 60 = 15$ min

Example 78: एक नाव दो निश्चित बिन्दुओं A व B के मध्य नदी के प्रवाह की दिशा के अनुदिश गति करती है, तो t_1 समय लेती है तथा उन्हीं दो निश्चित बिन्दुओं के मध्य जब धारा के विपरित दिशा में गति करती है तो, t_2 समय लेती है। स्थिर पानी में AB दूरी तय करने में यह कितना समय लेगी?

(1) $\left(\dfrac{2t_1t_2}{t_1 + t_2}\right)$ (2) $\left(\dfrac{t_1t_2}{t_1 + t_2}\right)$

(3) $\left(\dfrac{t_1 + t_2}{2t_1t_2}\right)$ (4) $\left(\dfrac{t_1 + t_2}{2}\right)$

Solution: $t_1 = \dfrac{AB}{v_b + v_R}$, $t_2 = \dfrac{AB}{v_b - v_R}$

or $v_b + v_R = \dfrac{AB}{t_1}$ and $v_b - v_R = \dfrac{AB}{t_2} \Rightarrow 2v_b = \dfrac{AB}{t_1} + \dfrac{AB}{t_2} = AB\left(\dfrac{t_1 + t_2}{t_1t_2}\right)$

or $\left(\dfrac{2t_1t_2}{t_1 + t_2}\right) = \dfrac{AB}{v_b}$ = स्थिर पानी में AB दूरी तय करने में नाव द्वारा लिया गया समय।

Example 79: एक नाव को स्थिर पानी पर 5 m/s से चलाया जा सकता है। यह 200 m चौड़ी नदी में इसके दक्षिणी किनारे से उत्तरी किनारे तक जाने में उपयोग ली जाती है। नदी की धारा का पूर्व दिशा की ओर एक समान वेग 3 m/s है।

(i) नदी की धारा के लम्बवत नदी को पार करने के लिये नाव को किस दिशा में चलाना होगा ?

(ii) नदी के बहाव के लम्बवत दिशा में यह नदी को पार करने में कितना समय लेगी ?

(iii) न्यूनतम समय में नदी को पार करने के लिये नाव को किस दिशा में चलाना होगा ? यह कितनी दूरी तक अपवहन करगी?

Solution: (i) बहाव के लम्बवत नदी को पार करना है अर्थात लघुत्तम पथ के अनुदिश

$$\sin\theta = \frac{u}{v} = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = 37^\circ$$

(ii) नाव द्वारा लिया गया समय,

$$t = \frac{d}{v\cos\theta} = \frac{200}{5\times\frac{4}{5}} = 50s$$

(iii) न्यूनतम समय में नदी को पार करने के लिए, $\theta = 0^o$

अतः $t_{min} = \frac{d}{v} = \frac{200}{5}s = 40s$

अपवहन = $u(t_{min}) = 3(40)m = 120$ m

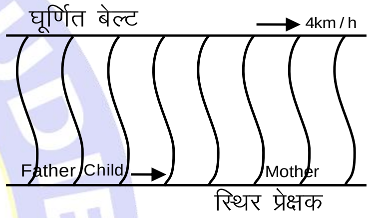
Example 80: क्षैतिज में गतिमान कोई लंबा पट्टा 4 km h^{-1} की चाल से चल रहा है। एक बालक इस पर (पटे के सापेक्ष) 9 km h^{-1} की चाल से कभी आगे कभी पीछे अपने माता–पिता के बीच दौड़ रहा है। माता व पिता के बीच 50 m की दूरी है। बाहर किसी स्थिर प्लेटफार्म पर खड़े एक प्रेक्षक के लिए, निम्नलिखित का मान ज्ञात किजिए –

(i) पट्टे की गति की दिशा में दौड़ रहे बालक की चाल,

(ii) पट्टे की गति की विपरित दिशा में दौड़ रहे बालक की चाल

(iii) बच्चे द्वारा (i) व (ii) में लिया गया समय

यदि बालक की गति का प्रेक्षण उसके माता व पिता करें तो कौनसा उत्तर परिवर्तित हो जाएगा ?



Solution: बाहर से स्थिर प्लेट पर प्रेक्षक के लिए

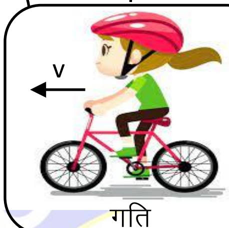
(i) प्रेक्षक के सापेक्ष बच्चे की चाल = 9 + 4 = 13 km/h

(ii) प्रेक्षक के सापेक्ष बच्चे की चाल = 9 – 4 = 5 km/h

(iii) बच्चे के द्वारा लिया गया समय = $\frac{50}{9\times\frac{5}{18}}$ = 20 sec.

उत्तर a तथा b में अंतर होगा यदि दोनों में से किसी एक अभिभावक के द्वारा गति देखी जाए।

गति



1-D गति

$\vec{v}_1$ (→), $\vec{v}_2$ (→)

$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$

$\vec{v}_1$ (→), $\vec{v}_2$ (←)

$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

गति की समीकरण

- $v_{rel.} = u_{rel.} + a_{rel.}\, t$
- $s_{rel.} = u_{rel.} t + \frac{1}{2} a_{rel.} t^2$
- $v^2_{rel.} = u^2_{rel.} + 2a_{rel} s_{rel}$
- $s_{rel.} = \frac{1}{2}(u_{rel.} + v_{rel})t$

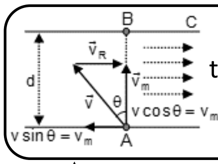
आपेक्षित गति

2-D गति

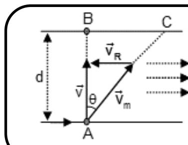
$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$

$\Rightarrow |\vec{v}_{AB}| = \sqrt{v_A^2 + v_B^2 - 2v_A v_B \cos\theta}$

नदी–नाव

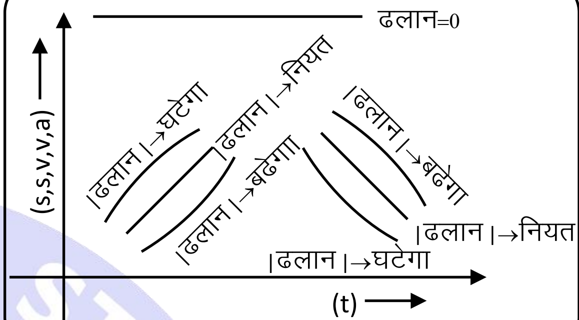


$t_{न्यूनतम\ दूरी} = \frac{d}{v\cos\theta} = \frac{d}{\sqrt{v^2 - v_R^2}}$



$t_{min} = \frac{d}{v}$

ग्राफ



1-D गति के प्राचल

दूरी

- वास्तविक पथ की लंबाई
- अदिश राशि
- कभी-ve नहीं हो सकता
- हमेशा बढ़ता है
- स्थिर हो सकता है
- शून्य नहीं हो सकता
- SI मात्रक मीटर है।
- CGS मात्रक सेमी है।

चाल

- दूरी की समय दर
- अदिश राशि
- कभी -ve नहीं हो सकता
- बढ़ या घट सकता है
- शून्य हो सकता ह
- SI मात्रक मी/सैकण्ड है
- CGS मात्रक सेमी/सैकण्ड है

त्वरण

- वेग की समय दर
- सदिश राशि
- +ve या -ve हो सकता है
- बढ़ सकता है या घट सकता है।
- शून्य हो सकता है यदि $v = f(t)$
- SI मात्रक m/s^2
- CGS मात्रक cm/s^2

विस्थापन

- सबसे कम दूरी
- धनात्मक या-veहो सकता है
- बढ़ या घट सकता है
- शून्य हो सकता है
- वेक्टर मात्रा
- SI इकाई मी
- CGS इकाई सेमी
- द्यविस्थापनद्य
- दूरी

वेग

- विस्थापन की समय दर
- सदिष राशि
- +ve या -ve हो
- बढ या घट सकता हैं
- शून्य हो सकता हैं
- SI मात्रक m/s
- CGS मात्रक cm/s
- |वेग| = चाल

गति के समीकरण

- $v = u + at$
- $s = ut + \frac{1}{2}at^2$
- $v^2 - u^2 = 2as$
- $s = v_{av}\, t = \frac{(u+v)}{2} t$
- $s = vt - \frac{1}{2}at^2$
- $s_{nth} = u + \frac{1}{2}a(2n-1)$

यदि $v = f(x)$

$a = \frac{dv}{dt}$

$a = \frac{vdv}{dx}$

$a = f(t)$

$\int_u^v dv = \int_{t_1}^{t_2} adt$

$a = f(x)$

$\int_u^v vdv = \int_{x_1}^{x_2} adx$

चाल में परिवर्तन कि दर = $\vec{a} \cdot \hat{v}$

2-D प्रेक्षप्य गति

जमीन से जमीन पर प्रक्षेपन

- $x = (u\cos\theta)t$
- $y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2 = (u\sin\theta)\, t - \frac{1}{2}gt^2$
- उड्डयन काल $= \frac{2u_y}{g} = \frac{2u\sin\theta}{g}$
- अधिकतम ऊँचाई $\frac{u_y^2}{2g} = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$
- $R = \frac{2u_x u_y}{g} = \frac{2(u\cos\theta)(u\sin\theta)}{g} = \frac{u^2\sin 2\theta}{g}$
- $y = x\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta}$

or $y = x\tan\theta \left[1 - \frac{x}{R}\right]$