Chapter 02

मात्रक एंव मापन
(Unit & Measurement)

CONTENT

1. भौतिक राशिया
2. मात्रको कि प्रणाली
3. विमाऐ
4. विमाओ के अनुप्रयोग
5. मापन मे त्रुटिया
6. निरपेक्ष एवं आपेक्षिक त्रुटियां
7. प्रतिशत त्रुटियां
8. त्रुटियो का संयोजन
9. सार्थक अंक
10. अंको का पूर्णांकन

1. भौतिक राशियां (Physical Quantities):

वह राशियां जो एक उपकरण से मापी जा सकती है या जिसके माध्यम से हम भौतिकी के नियमों को व्युत्पन्न कर सकते है, भौतिक राशियां कहलाती हैं। कक्षा X तक हमने बहुत सी भौतिक राशियो उदाहरण के तौर पर लम्बाई, वेग, त्वरण, बल, समय, दाब, द्रव्यमान, घनत्व इत्यादि का अध्ययन किया।

भौतिक राषि तीन प्रकार की होती हैं

मूलभूत राशिया
➢ सभी मूलभूत राशिया इस प्रकार चुनी जाती है कि वे भिन्न होनी चाहिए। इसका तात्पर्य एक दूसरे से स्वतंत्र हो।

व्युत्पन्न राषिया
➢ वह भौतिक राशिया जो मूलभूत राशियो (M,L,T....) के रूप में व्यक्त कि जा सकती है व्युत्पन्न राशिया कहलाती हैं।

उदा. चाल = $\frac{\text{लम्बाई}}{\text{समय}}$

पूरक राषिया
➢ सात मूलभूत राशियो के अलावा दो पूरक राशिया भी ज्ञात कीजिए। वे निम्न हैं
(i) समतल कोण
(ii) ठोस कोण

1.1 मूलभूत राशियाँ :

➢ यह वह राशियां है जो भौतिकी की सम्पूर्ण विविधताओ को समाहित करती है।

➢ इनसे अन्य राशियां व्युत्पन्न की जा सकती है।

➢ सभी आधारभूत राशियां इस प्रकार चुनी जाती है कि वे भिन्न होनी चाहिए इसका तात्पर्य एक दूसरे से स्वतन्त्र हो (अर्थात् दूरी, समय व वेग को आधारभूत राशियों के रूप में नही चुना जा सकता $\left(v = \frac{d}{t}\right)$ एक अर्न्तराष्ट्रीय संस्था (CGPM) [भार व मापन पर एक सामान्य सम्मेलन] ने सात मूलभूत या आधारभूत राशियों को चुना।.

मूलभूत राशिया

- लम्बाई (L)
- समय (T)
- द्रव्यमान (M)
- तापमान (K)
- विद्युत धारा (A)
- प्रदीपन तीव्रता (Cd)
- पदार्थ की मात्रा (mol)

2. मात्रकों की अंतर्राष्ट्रीय प्रणाली (The international system of units):

बहुत वर्षो तक मापन के लिए, विभिन्न देशों के वैज्ञानिक, अलग–अलग मापन प्रणालियों का उपयोग करते थे। अब से कुछ समय–पूर्व तक ऐसी तीन प्रणालियाँ – CGS प्रणाली, FPS (या ब्रिटिश) प्रणाली एवं MKS प्रणाली, प्रमुखता से प्रयोग में लाई जाती थीं।

➢ **CGS प्रणाली** → सेन्टीमीटर, ग्राम व सैकण्ड़

➢ **FPS प्रणाली** → फिट, पाउंड व सैकण्ड़

➢ **MKS प्रणाली** → मीटर, किलोग्राम व सैकण्ड़

2.1 S.I. प्रणाली

➢ आजकल अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर मान्य प्रणाली "सिस्टम इन्टरनेशनल डि यूनिट्स" है इसे संकेताक्षर में SI लिखा जाता है। SI प्रतिकों, मात्रकों और उनके संकेताक्षरों की योजना 1971 में, मापतोल के महा सम्मेलन द्वारा विकसित कर, वैज्ञानिक, तकनीकी, औद्योगिक एवं व्यापरिक कार्यों में अंतर्राष्ट्रीय स्तर पर उपयोग हेतु अनुमोदित की गई। SI मात्रकों की 10 की घातों पर आधारित प्रकृति के कारण, प्रणाली के अंतर्गत रूपांतरण अत्यंत सुगम एवं सुविधाजनक है।

2.2 S.I. मूल राशियाँ एवं उनके मात्रक (S.I. Base quantities and units) :

- **लम्बाई (मीटर) :** प्रकाश द्वारा निर्वात में एक सेकंड के 299, 792, 458 वें समय अंतराल में तय किए गए पथ की लम्बाई एक मीटर है। (1983 से मान्य) इसे m द्वारा प्रदर्शित करते है।
- **द्रव्यमान (किलोग्राम) :** फ्रांस में पेरिस के पास सेवरिस में स्थित अंतर्राष्ट्रीय माप–तोल ब्यूरो में रखे किलोग्राम के अंतर्राष्ट्रीय आदि प्ररूप (प्लेटिनम–इरिडियम मिश्रधातु से बने सिलिडंर) का द्रव्यमान एक किलोग्राम के बराबर है। (1889 से मान्य)। इसे kg द्वारा प्रदर्शित करते है।
- **समय (सेकण्ड्) :** एक सेकण्ड व अंतराल है जो सिज़ियम 133 परमाणु के निम्नतम ऊर्जा स्तर के दो अतिसूक्ष्म स्तरों के मध्य संक्रमण में तदनुरूपी विकिरण के 9, 192, 631, 770 आवर्त कालों के बराबर है। (1967 से मान्य)। इसे s से प्रदर्शित करते है।
- **विद्युत धारा (ऐम्पियर) :** एक ऐम्पियर वह नियत विद्युत धारा है जो निर्वात में 1 मीटर की दूरी पर स्थित दो सीधे अनंत लम्बाई वाले समानांतर एवं नगण्य वृत्तीय अनुप्रस्थ काट के चालकों में प्रवाहित होने पर, इन चालकों में बीच प्रति मीटर लंबाई पर 2×10^{-7} न्यूटन का बल उत्पन्न करती है। (1948 से मान्य)। इसे A से प्रदर्शित करते है।
- **ऊष्मागतिक ताप (केल्विन) :** जल के त्रिक–बिंदु के ऊष्मागतिक ताप के 1/273.16 वें भाग को 1 केल्विन कहते हैं। (1967 से मान्य)। इसे K से प्रदर्शित करते हैं।
- **पदार्थ की मात्रा (मोल) :** 1 मोल किसी निकाय में पदार्थ की वह मात्रा है जिसमें उतनी ही मूल सत्ताएं होती हैं जितनी 0.012 kg कार्बन-12 में परमाणुओं की संख्या होती है। (1971 से मान्य)। इसे m से प्रदर्शित करते है।
- **ज्योति–तीव्रता (केण्डला) :** केण्डला में दिशा में 540 × 1012 Hz आवृत्ति वाले स्त्रोत की ज्योति–तीव्रता है जो उस दिशा में 1/683 वाट प्रति स्टेरेडियन की विकिरण तीव्रता का एकवर्णीय प्रकाश उत्सर्जित करता है (1979 से मान्य) इसे Cd से प्रदर्शित करते है।

राषियों कि S.I. मात्रक

S.NO.	भौतिक राषिया	मात्रक	प्रतीक
1.	लम्बाई	मीटर	m
2.	द्रव्यमान	किलोग्राम	kg
3.	समय	सैकण्ड	s
4.	तापमान	केल्विन	K
5.	विद्युत धारा	एम्पीयर	A
6.	ज्योति तीव्रता	केडला	cd
7.	पदार्थ कि मात्रा	मोल	mol

2.3 व्युत्पन्न राशियो की SI इकाईयां (SI units of derived Quantities) :

- वेग = $\dfrac{\text{विस्थापन} \rightarrow \text{मीटर}}{\text{समय} \rightarrow \text{सेकण्ड}}$

  अतः वेग का मात्रक m/s होगा।
- त्वरण = $\dfrac{\text{वेग में परिवर्तन}}{\text{समय}} = \dfrac{m/s}{s} = \dfrac{m}{s^2}$
- संवेग = mass × velocity, Unit= (kg) (m/s) = kg m/s
- बल = ma

  इकाई = (kg) × (m/s^2) = kg m/s^2 न्यूटन (N) कहलाती है।
- कार्य = FS

  इकाई = (N) × (m) = N m called joule (J)
- शक्ति = $\dfrac{\text{कार्य}}{\text{समय}}$

  इकाई = J/s वॉट (w) कहलाती है।

2.4 पूरक मात्रक

दो पूरक मात्रक भी परिभाषित किये गये थे:-

- **समतल कोण – विमा = रेडियन (rad)**

- **ठोस कोण – विमा = स्टेरेडियन (sr)**

2.5 SI उपसर्ग

Power of 10	उपसर्ग	प्रतिक
10^{18}	exa	E
10^{15}	peta	P
10^{12}	tera	T
10^{9}	**giga**	**G**
10^{6}	**mega**	**M**
10^{3}	**kilo**	**k**
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da

Power of 10	उपसर्ग	प्रतिक
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	**milli**	**m**
10^{-6}	**micro**	**μ**
10^{-9}	**nano**	**n**
10^{-12}	**pico**	**p**
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

2.5 मापन के सिद्धान्त, आंकिक मान व इकाई Principal of measurement, numerical value and unit :

एक भौतिक राशि के मापन के परिणामस्वरूप 'n' संख्या (आंकिक मापन) 'u' इकाई सहित व्यक्त की जाती है।

मापन = nu

3. विमाऐं (DIMENSIONS) :

- किसी भौतिक राशि की प्रकृति की व्याख्या उसकी विमाओं द्वारा की जाती है।
- व्युत्पन्न मात्रकों द्वारा व्यक्त होने वाली सभी भौतिक राशियाँ, सात मूल राशियों को संयोजन के पदों में प्रस्तुत की जाती है।
- इन मूल राशियों को हम भौतिक संसार की सात विमाएँ कह सकते हैं और इन्हें [ ] कोष्ठक के साथ निर्दिष्ट किया जाता है।
- इस प्रकार, लम्बाई की विमा [L], विद्युत धारा की [A], ऊष्मागतिकीय ताप की [K], ज्योति तीव्रता की [cd], और पदार्थ की मात्रा की [mol] है।
- किसी भौतिक राशि की विमाएँ उन घातों (या घातांकों) को कहते हैं, जिन्हें उस राशि को व्यक्त करने के लिए मूल राशियों पर चढ़ाना पड़ता है।

e.g. $\text{वेग} = \dfrac{\text{विस्थापन}(\text{लम्बाई})}{\text{समय}}$

$\text{इसलिए वेग कि विमा} = \dfrac{\text{विस्थापन कि विमा}}{\text{समय कि विमा}} = \dfrac{[L]}{[T]} = [LT^{-1}]$

3.1 विमीय सूत्र, विमीय समीकरणें व अभिलाक्षिणक

(DIMENSIONAL FORMULA, DIMENSIONAL EQUATION & CHARACTERISTICS) :

किसी भौतिक राशि को उसके विमीय सूत्र के बराबर लिखने पर प्राप्त समीकरण को उस राशि का विमीय समीकरण कहते हैं। अतः विमीय समीकरण वह समीकरण है जिसमें किसी भौतिक राशि को मूल राशियों और उनकी विमाओं के पदों में निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, आयतन [V], चाल [v], बल [F] और द्रव्यमान घनत्व [ρ] की विमीय समीकरण को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$[V] = [M^0L^3T^0]$, $[v] = [M^0LT^{-1}]$, $[F] = [M\,L\,T^{-2}]$, $[\rho] = [M\,L^{-3}T^0]$

- शुद्ध संख्याऐं (Pure numbers) विमाहीन है।
- सभी त्रिकोणमितीय अनुपात, घात, चरघातांकी व लघुगुणकीय फलन विमाहीन है।
- समान विमीय सूत्र वाली भौतिक राशियों के सभी अनुपात विमाहीन है अर्थात् आपेक्षिक घनत्व, आपेक्षिक परावैद्युतशीलता, परावैधुतांक, कोण, अपवर्तनांक इत्यादि।

Note: समतल कोण, ठोस कोण विमाहीन हैं

- विमाऐ परिमाण पर निर्भर नही करती है।

➢ भौतिक राषि कि विमाए समान होगी, यह इस बात पर निर्भर नहीं करता हैं कि हम उस मात्रा के लिए सूत्र का उपयोग करते हैं।

राषिया	प्रतिक	सूत्र	S.I मात्रक	विमाऐं
विस्थापन	s	ℓ	मीटर or m	M^0LT^0
क्षेत्रफल	A	$\ell \times b$	(मीटर)^2 or m^2	$M^0L^2T^0$
आयतन	V	$\ell \times b \times h$	(मीटर)^{3}or m^3	$M^0L^3T^0$
वेग	V	$V = \frac{\Delta S}{\Delta T}$	m/s	M^0LT^{-1}
संवेग	**P**	**P = mv**	**Kgm/s**	MLT^{-1}
त्वरण	**A**	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	m/s^2	M^0LT^{-2}
आवेग	**F**	**F = ma**	**न्यूटन or N**	MLT^{-2}
बल	**–**	**F × t**	**N.sec**	MLT^{-1}
कार्य	**W**	**F . d**	**N.m**	$ML^2 T^{-2}$
ऊर्जा	**KE or U**	$K.E = \frac{1}{2}mv^2$ **P.E = mgh**	**जूल or j**	ML^2T^{-2}
शक्ति	P	$P = \frac{W}{t}$	Watt or W	ML^2T^{-3}
घनत्व	d	d = द्रव्यमान / आयतन	Kg/m^3	$ML^{-3}T^0$
दाब	P	P = F/A	पास्कल or Pa	$ML^{-1}T^{-2}$
बलाधूर्ण	τ	$\tau = r \times F$	N.m	ML^2T^{-2}
कोणीय विस्थापन	θ	$\theta = \frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$	रेडियन or rad	विमाहीन
कोणीय वेग	ω	$\omega = \frac{\theta}{t}$	rad/sec	$M^0L^0T^{-1}$
कोणीय त्वरण	α	$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$	rad/sec^2	$M^0L^0T^{-2}$
जड़त्व आघूर्ण	I	$I = mr^2$	Kg–m^2	ML^2T^0
आवृति	f	$f = \frac{1}{T}$	हट्र्ज or Hz	$M^0L^0T^{-1}$
प्रतिबल	–	F/A	N/m^2	$ML^{-1}T^{-2}$
विकृति	–	$\frac{\Delta\ell}{\ell}; \frac{\Delta A}{A}; \frac{\Delta V}{V}$	–	विमाहीन
यंग प्रत्यास्थता गुणांक	Y	$Y = \frac{F/A}{\Delta\ell/\ell}$	N/m^2	$ML^{-1}T^{-2}$
पृष्ठ तनाव	T	$\frac{F}{\ell}$ or $\frac{W}{A}$	$\frac{N}{m}; \frac{j}{m^2}$	ML^0T^{-2}
बल स्थिरांक (स्प्रिंग)	K	F = kx	N/m	ML^0T^{-2}
श्यानता गुणांक	η	$F = \eta\left(\frac{dv}{dx}\right)A$	Kg/ms(poise in C.G.S)	$ML^{-1}T^{-1}$
गुरूत्वाकर्षण स्थिरांक	G	$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$	$\frac{N-m^2}{kg^2}$	$M^{-1}L^3T^{-2}$
गुरूत्वाकर्षण क्षमता	V_g	$V_g = \frac{PE}{m}$	$\frac{j}{kg}$	$M^0L^2T^{-2}$

गुरूत्वाकर्षण क्षेत्र कि तीव्रता	I	$I = \frac{F}{M}$	$\frac{Newton}{Kg}$	$M^0L^1T^{-2}$
तापमान	θ	–	Kelvin or K	$M^0L^0T^0K^{+1}$
ऊष्मा	Q	$Q = m \times C \times \Delta t$	Joule or Calorie	ML^2T^{-2}
विशिष्ट ऊष्मा	C	$C = \frac{Q}{m \times \Delta t}$	$\frac{joule}{kg.Kelvin}$	$M^0L^2T^{-2}K^{-1}$
अंतर्निहित ऊष्मा	L	$Q = mL$	$\frac{joule}{kg}$	$M^0L^2T^{-2}$
तापीय चालकता गुणांक	K	$Q = \frac{KA(\theta_1 - \theta_2)}{d}$	$\frac{joule}{m\,sec\,K}$	$MLT^{-3}K^{-1}$
सार्वभौमिक गैस नियतांक	R	$PV = nRT$	$\frac{joule}{mol\,K}$	$ML^2T^{-2}K^{-1}mol^{-1}$
ऊष्मा का यात्रिंक तुल्यांक	J	$W = JH$	–	no dimension
आवेश	Q or q	$I = \frac{Q}{t}$, $Q = It$	Coulomb or C	$M^0L^0T^1A^1$
धारा	I	–	Ampere or A	$M^0L^0T^0A$
विद्युत परागम्यता	ε_0	$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi F} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$	$\frac{C^2}{N-m^2}$	$M^{-1}L^{-3}T^4A^2$
विद्युत विभव	V	$V = \frac{\Delta W}{q}$	Joule/c	$ML^2T^{-3}A^{-1}$
विद्युत क्षेत्र कि तीव्रता	E	$E = \frac{F}{q}$	N/coul.	$MLT^{-3}A^{-1}$
धारिता	C	$Q = CV$	Farad	$M^{-1}L^{-2}T^4A^2$
परावैधुतांक नियतांक या आपेक्षित परागम्यता	ε_t	$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$	–	no dimension
प्रतिरोध	R	$V = IR$	Ohm	$ML^2T^{-3}A^{-2}$
चालकत्व	S	$S = \frac{1}{R}$	Mho	$M^{-1}L^{-2}T^{+3}A^2$
विशिष्ट प्रतिरोध या प्रतिरोधकता	ρ	$\rho = \frac{RA}{\ell}$	Ohm × meter	$ML^3T^{-3}A^{-2}$
चालकत्व या विषिष्ट चालकत्व	σ	$\sigma = \frac{1}{\rho}$	Mho/meter	$M^{-1}L^{-3}T^3A^2$
चुम्बकीय प्रेरण	B	$F = qvB\sin\theta$ Or $F = BIL$	Tesla or weber/m^2	$MT^{-2}A^{-1}$
चुम्बकीय फलक्स	ϕ	$e = \frac{d\phi}{dt}$	Weber	$ML^2T^{-2}A^{-1}$
चुम्बकीय तीव्रता	H	$B = \mu H$	A/m	$M^0L^{-1}T^0A$
मुक्त स्थान या माध्यम क चुम्बकीय परागम्यता	μ_0	$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id1\sin\theta}{r^2}$	$\frac{N}{amp^2}$	$MLT^{-2}A^{-2}$
स्वः या अन्योय प्रेरण	L	$e = L\frac{dI}{dt}$	Henry	$ML^2T^{-2}A^{-2}$
विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण	P	$P = q \times 2\ell$	C.m	M^0LTA
चुम्बकीय द्विघूर्ण आघूर्ण	M	$M = NIA$	amp.m^2	$M^0L^2AT^0$

SPOT LIGHT

आयामों की एकरूपता का सिद्धांत :

यह बताता है कि एक सही समीकरण में, जोड़े या घटाए गए प्रत्येक पद की विमाएँ होनी चाहिए वही। हर सही समीकरण के समीकरण के दोनों पक्षों में समान आयाम होने चाहिए।

यानी (i) L-H-S का आयाम = R-H-S का आयाम

(ii) यदि एक समीकरण A + B = C – D तो A, B, C, D के समान आयाम हैं।

4. विमाओं के अनुप्रयोग (Application of dimensions):

4.1 सूत्र के सत्यता को जाँचने के लिए :

विमाओं की समरूपता का उपयोग, समी. के लिए-

L.H.S = R.H.S

- यदि L.H.S व R.H.S की विमाऐं समान है तो हम कह सकते है कि यह समीकरण विमीय रूप से सही है। अतः यह समीकरण सही हो सकती है।
- परन्तु यदि L.H.S व R.H.S की विमाऐं समान नही है, तो समीकरण विमीय रूप से सही नही है। अतः यह सही नही हो सकती।

उदाहरण:

अभिकेन्द्रीय बल F_e के लिए सूत्र दिया है : $F_e = \frac{mv^2}{r}$

(जहाँ m = द्रव्यमान, v = वेग, r = त्रिज्या)

हमे यह जाँचना चाहिए कि यह सही है या नही।

L.H.S की विमा है :

$[F] = [M^1L^1T^{-2}]$

R.H.S की विमा है :

$$\frac{[m][v^2]}{[r]} = \frac{[M][LT^{-1}]^2}{[L]} = [M^1L^1T^{-2}]$$

अतः यह समीकरण कम से कम विमीय रूप से सही है।

हम कह सकते है कि यह समीकरण सही हो सकती है।

4.2 चरो के मध्य सम्बंध के व्यजंक का निरूपण:

यदि एक राशि बहुत से प्राचल पर निर्भर करती है, हम किस सीमा तक अनुमान लगा सकते है कि राशि दिए गए प्राचलो पर निर्भर करती है।

उदाहरण: सरल लोलक का आर्वत काल निम्न पर निर्भर करता हैं

- लोलक के द्रव्यमान पर (m)
- डोरी की लम्बाई पर (ℓ)
- त्वरणीय गुरूत्वाकर्षण पर (g)

इसलिए हम कह सकते है T के रूप में

$T \propto (m)^a (\ell)^b (g)^c$

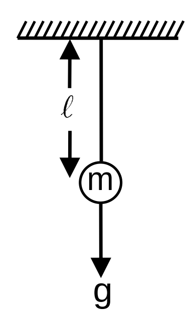
$M^0L^0T^1 = (1)\,[M^1]^a\,[L^1]^b\,[L^1T^{-2}]^c$

$\Rightarrow M^0L^0T^1 = M^a\,L^{b+c}\,T^{-2c}$

M, L और T, कि घांतो कि तुलना करने पर

$a = 0,\ b + c = 0,\ -2c = 1$ so $a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{2}$

So, $T \propto M^0\,L^{1/2}\,g^{-1/2} \Rightarrow$ $T = (\text{स्थिरांक})\sqrt{\frac{\ell}{g}}$



KHAN GLOBAL STUDIES
Most Trusted Learning Platform
KHAN SIR

प्रयोगात्मक रूप से नियतांक का मान ज्ञात किया जा सकता हैं।

4.3 इकाइयों का रूपांतरण :

$n[u]$ = नियतांक अर्थात्, $n_1[u_1] = n_2[u_2]$ जहाँ n आंकिक मान तथा u इकाई है।

$$n_2 = n_1\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^a\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^b\left[\frac{T_1}{T_2}\right]^c$$

जहाँ भौतिक राशि का विमीय सूत्र $[M^aL^bT^c]$

4.4 विमीय विश्लेषण की सीमाऐं (Limitations of dimensional analysis):

- विमीय विश्लेषण 'नियतांक' के विषय में सूचना नही देता है, विमीय नियतांक कहलाता है।
- यह विधि केवल तब उपयोगी है जब एक भौतिक राशि गुणनफल व घात सम्बंधो द्वारा अन्य राशियों पर निर्भर करती है (अर्थात्, $f = x^a\, y^b\, z^c$) यह विफल होती है यदि भौतिक राशि दो राशियो के योग व अन्तर (difference) पर निर्भर करता है (अर्थात्, $f = x + y - z$)
  अर्थात् हम सम्बंध प्राप्त नही कर सकते
  विमीय विश्लेषण से $S = ut + \frac{1}{2}at^2$
- यह विधि कार्य नही करेगी यदि एक राशि, अन्य राशि जैसे (sine) या कोज्या (cosine) लघुगुणकीय या चरघातांकी सम्बंध पर निर्भर करता है। यह विधी केवल तब कार्य करती है यदि निर्भरता घात फलनो (Power function) द्वारा होती है।
- हम M, L व T की घातो को बराबर मानते है तो हम केवल तीन समीकरणे प्राप्त होती है। अतः हम केवल तीन चर रख सकते है (केवल तीन निर्भर राशियां)
  अतः विमीय विश्लेषण केवल तभी प्रयोग होगा यदि भौतिक राशि केवल तीन प्राचलो (इससे अधिक नही) पर निर्भर करे।

SOLVED EXAMPLES

Example: 1 निम्न में से कौनसा सेट मात्रको की नई पद्धति मे मूलभूत राशियों की सूची में सम्मिलित नही किया जा सकता ?

(1) लम्बाई, द्रव्यमान व वेग (2) दाब, घनत्व व वेग (3) बल, वेग व समय (4) बल, संवेग व समय

Solution:
(1) के लिए : लम्बाई [L], द्रव्यमान [M] व वेग $[LT^{-1}]$ स्वतन्त्र है
(2) के लिए : दाब $[M'L^{-1}T^{-2}]$, घनत्व $[M'L^{-3}T^0]$ व वेग $[M^0LT^{-1}]$ निर्भर करते है
(3) के लिए : बल $[MLT^{-2}]$, वेग $[LT^{-1}]$ व समय [T] स्वतन्त्र है
(4) बल = $\frac{\text{संवेग}}{\text{समय}}$
$\Rightarrow$ बल, संवेग व समय निर्भर करते है

Example: 2 समतल से 5 m दूर एक बिन्दु के चारो ओर 6 cm^2 क्षेत्रफल के तल द्वारा परिबद्ध ठोस कोण क्या होता है ?

(1) 1.24×10^{-4} (2) 0.24×10^{-4} (3) 6×10^2 (4) 0.05×10^{-2}

Solution: चुंकि क्षेत्रफल बिन्दु से दूरी की तुलना में छोटा है, समतल भाग को वक्रीय भाग के रूप में माना जा सकता है। इसलिए ठोस कोण होगा

$$\Omega = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{R^2} = \frac{6\times10^{-4}}{5^2} = 0.24 \times 10^{-4}$$

Example: 3 सभी को मीटर में परिवर्तित करे।

(i) 5 μm. (ii) 3 km (iii) 20 mm (iv) 73 pm
(v) 7.5 nm

Solution:
(i) 5 μm = 5×10^{-6}m
(ii) 3 km = 3×10^3 m
(iii) 20 mm = 20×10^{-3}m
(iv) 73 pm = 73×10^{-12} m
(v) 7.5 nm = 7.5×10^{-9} m

Example: 4 F = 5 N को CGS पद्धति में परिवर्तित कीजिए।

Solution: $F = 5\,\frac{kg\times m}{s^2} = (5)\,\frac{(10^3 g)(100 cm)}{s^2} = 5\times10^5\,\frac{g\,cm}{s^2}$ (in CGS system).

यह इकाई ($\frac{g cm}{s^2}$) डाईन कहलाती है।

Example: 5 निम्न का विमीय सूत्र ज्ञात कीजिए।

(i) घनत्व (ii) वेग (iii) त्वरण (iv) संवेग

(v) कोण (vi) बलाघूर्ण

Solution:

(i) [घनत्व] = $\frac{\text{द्रव्यमान}}{\text{आयतन}} = \frac{M}{L^3} = [M^1L^{-3}]$

(ii) वेग [V] = $\frac{\text{विस्थापन}}{\text{समय}} = \frac{L}{T} = [M^0L^1T^{-1}]$

(iii) त्वरण (a) = $\frac{dV}{dt} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2}$

(iv) संवेग (P) = mV = $[M^1L^1T^{-1}]$

(v) कोण (θ) = $\frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}} = \frac{L}{L} = [M^0L^0T^0]$ (विमाहीन)

(vi) बलाघूर्ण = बल × भूजा लम्बाई = $[M^1L^1T^{-2}] \times [L] = [M^1L^2T^{-2}]$

Example: 6 एक वस्तु के ताप में ΔT वृद्धि करने पर आवश्यक ऊष्मा Q = ms ΔT है यहाँ 's' विशिष्ट ऊष्मा धारिता है। तो 's' का विमीय सूत्र ज्ञात कीजिऐ।

(1) $[M^1L^2T^{-2}K]$ (2) $[M^0L^2T^{-2}K^{-1}]$ (3) $[M^1L^2T^{-2}K^2]$ (4) $[M^1L^1T^1K^1]$

Solution:

$[Q] = [m] [s] [\Delta T]$

यहाँ Q ऊष्मा है : एक प्रकार की ऊर्जा अतः $[Q] = M^1L^2T^{-2}$

$[Q] = M^1L^2T^{-2}$

$[M^1L^2T^{-2}] = [M] [S] [K]$

$[S] = [M^0L^2T^{-2}K^{-1}]$

Example: 7 यदि r त्रिज्या की कोई गोलीय गेंद एक श्यान द्रव में v श्यानता से गति करती है, तो इस पर कार्यरत् श्यान बल दिया गया है।

$F_v = 6\pi\eta rv$

यहाँ η श्यानता गुणांक है। 'η' का विमीय सूत्र ज्ञात कीजिऐ।

(1) $[M^1L^2T^{-3}]$ (2) $[M^1L^{-2}T^{-1}]$ (3) $[M^1L^{-1}T^{-1}]$ (4) $[M^2L^2T^{-2}]$

Solution:

$[F_v] = [6\pi] [\eta] [r] [v]$

$M^1L^1T^{-2} = (1) [\eta] [L] [LT^{-1}]$

$[\eta] = M^1L^{-1}T^{-1}$

Example: 8 $\alpha = \frac{FV^2}{\beta^2} \log_e \left(\frac{2\pi\beta}{V^2}\right)$ बल V = जहाँ F = बल, V = वेग

α व β की विमाऐ ज्ञात कीजिऐ।

(1) $[M^1L^{-1}T^0], [L^2T^{-2}]$ (2) $[M^0L^2T^1], [L^1T^{-1}]$

(3) $[M^0L^0T^0], [M^1L^2]$ (4) $[M^0L^0T^0], [M^0L^0]$

Solution:

$$\alpha = \frac{FV^2}{\beta^2} \log_e \frac{2\pi\beta}{V^2}$$

($\log_e \frac{2\pi\beta}{V^2}$ →) विमाहीन

$$[\alpha] = \frac{[F][V^2]}{[\beta^2]} \quad \Rightarrow \frac{[2\pi][\beta]}{[V^2]} = M^0L^0T^0$$

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

$\Rightarrow \frac{[1][\beta]}{L^2T^{-2}} = M^0L^0T^0$

$[\beta] = L^2T^{-2}$ $[\alpha] = \frac{[M^1L^1T^{-2}][L^2T^{-2}]}{[L^2T^{-2}]^2}$ $\Rightarrow [\alpha] = M^1L^{-1}T^0$

Example: 9 दो भौतिक राशियों A व B के गुणनफल व भागफल का विमीय सूत्र दिया गया है :

$[AB] = [ML^2T^{-2}]$; $\left[\frac{A}{B}\right] = [MT^{-2}]$ राशियां क्रमशः है :

(1) बल व वेग (2) बल व विस्थापन (3) संवेग व विस्थापन (4) कार्य व वेग

Solution: $[A]^2 = [AB].\left[\frac{A}{B}\right] = [M^2L^2T^{-4}]$

$\Rightarrow [A] = [MLT^{-2}] \equiv$ बल

$[B] = \frac{[AB]}{[A]} = [L] \Rightarrow [B] = [L] \equiv$ विस्थापन

Example: 10 निम्न समीकरण सही हो सकती है या नही, जांचिऐ।

दाब $P_r = \frac{3FV^2}{\pi^2t^2x}$ (जहाँ F = बल, V = वेग, t = समय, x = दूरी)

Solution: L.H.S की विमा $= [P_r] = M^1L^{-1}T^{-2}$

R.H.S की विमा $= \frac{[3][F][v^2]}{[\pi][t^2][x]} = \frac{[M^1L^1T^{-2}][L^2T^{-2}]}{[T^2][L]} = M^1L^2T^{-6}$

L.H.S व R.H.S की विमा समान नही है अतः सम्बंध सही नही हो सकता।

Example: 11 यदि वेग (V), बल (F) व समय (T) को मूलभूत राशियों के रूप में चुना जाऐ तो V, F व T के पदो में (i) द्रव्यमान (ii) ऊर्जा को व्यक्त कीजिऐ।

(1) $[M] = [V^{-1}F^1T^1]$, $[E] = [V^1][F^1][T^1]$ (2) $[M] = [V^{-2}F^2T^1]$, $[E] = [V^2][F^2][T^2]$

(3) $[M] = [V^0F^1T^2]$, $[E] = [V^3][F^0][T^{-1}]$ (4) $[M] = [V^1F^2T^{-3}]$, $[E] = [V^2][F^1][T^{-2}]$

Solution: माना $M = \propto (V)^a (F)^b (T)^c$

दोनो तरफ विमाओ की तुलना करने पर

$M^1L^0T^0 = (1) [L^1T^{-1}]^a [M^1L^1T^{-2}] [T^1]^c$

$M^1L^0T^0 = M^b L^{a+b} T^{-a-2b+c}$

a = – 1, b = 1, c = 1 प्राप्त होता है

$M = \propto (V^{-1} F^1 T^1)$ $[M] = [V^{-1} F^1 T^1]$

इसी प्रकार हम V , F , T के पदो मे ऊर्जा को भी व्यक्त कर सकते है।

माना $[E] = \propto [V]^a [F]^b [T]^c$

$\Rightarrow [MLT^{-2}] = [M^oL^oT^o] [LT^{-1}]^a [MLT^{-2}]^b [T]^c$

$\Rightarrow [M^1L^1T^{-2}] = [M^b L^{a-2b+c} T^{-a-2b+c}]$

$\Rightarrow 1 = b; 1 = a - 2b + c; -2 = -a - 2b + c$

a =1 ; b = 1 ; c = 1 प्राप्त होता है

$\therefore$ E = (नियतांक) $= [V^1][F^1][T^1]$.

Example: 12 किसी पदार्थ का घनत्व CNG में $2g/cm^3$ है। यदि लम्बाई की इकाई 21 m व द्रव्यमान की इकाई 4 g है तो पदार्थ के घनत्व का आंकिक मान क्या है ?

(1) 2 (2) 4 (3) 5 (4) 7

Solution: $n_1u_1 = n_2u_2 \Rightarrow n_2 = n_1\left[\left[\frac{M_1}{M_2}\right]^1\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{-3}\right] = 2\left[\left(\frac{1g}{4g}\right)\left(\frac{1cm}{2cm}\right)^{-3}\right] = 4$

5. मापन (MEASURMENT)

विमीय विश्लेषण की सीमाऐं (Limitations of dimensional analysi)

(i) लम्बाई का मापन

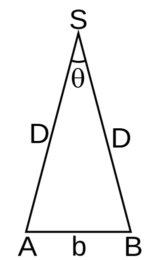
लम्बाई मापन की कुछ प्रत्यक्ष विधियों से आप पहले ही से परिचित हैं। उदारहण के लिए, आप जानते हैं। कि 10^{-3} m से 10^2 m तक की लम्बाइयाँ मीटर पैमाने का उपयोग करके ज्ञात की जाती हैं। 10^{-4} m की लम्बाई को यथार्थता से मापने के लिए हम वर्नियर कैलिपर्स का उपयोग करते हैं। स्क्रू–गेज (पेंचमापी) और गोलाईमापी (स्फेरोमीटर) का उपयोग 10^{-5} m तक की लम्बाइयों को मापने में किया जाता है। इन परिसरों से बाहर की लम्बाइयों को मापने के लिए हमें कुछ परोक्ष विधियों का सहारा लेना होता है।

(ii) बड़ी दूरियों का मापन :

बहुत बड़ी दूरियाँ, जैसे किसी ग्रह अथवा तारे की पृथ्वी से दूरी, प्रत्यक्ष–रूप से किसी मीटर पैमाने की सहायता से ज्ञात नहीं की जा सकती है। ऐसी दशाओं में महत्वपूर्ण विधि जिसे लम्बन–विधि कहते हैं, का उपयोग किया जाता है।

जब आप किसी पेंसिल को अपने सामने पकड़ते हैं ओर पृष्ठभूमि (माना दीवार) के किसी विशिष्ट बिन्दु के सापेक्ष पेंसिल को पहले अपनी बायीं आँख A से (दायीं आँख बंद रखे हुए) देखते हैं, और फिर दायीं आँख B से (बायीं आँख बंद रखते हुए), तो आप पाते हैं, कि दीवार के उस बिन्दु के सापेक्ष पेंसिल की स्थिति परिवर्तित होती प्रतीत होती हैं इसे लम्बन कहा जाता है। दो प्रेक्षण बिन्दुओं (A एवं B) के बीच की दूरी को आधारक कहा जाता है। इस उदाहरण में दोनो आँखों के बीच की दूरी आधार है।

लम्बन विधि द्वारा किसी दूरस्थ ग्रह S की दूरी D ज्ञात करने के लिए, हम इसको, पृथ्वी पर दो विभिन्न स्थितियों (वेध शालाओं) A एवं B से, एक ही समय पर देखते हैं। A एवं B के बीच की दूरी AB = b है। चित्र देखिए। इन दोनो स्थितियों से ग्रह के प्रेक्षण दिशाओं के बीच का कोण माप लिया जाता है। चित्र में θ द्वारा दर्शाया गया यह कोण $\angle ASB$ लम्बन कोण या लम्बनिक कोण कहलाता है।



क्योंकि, ग्रह की पृथ्वी से दूरी बहुत अधिक है $\frac{b}{D} << 1$, और, इसलिए, कोण θ बहुत ही छोटा है। ऐसी दशा में हम AB को, केन्द्र S और त्रिज्या D वाले वृत्त का, लम्बाई b का चाप मान सकते हैं। $\because$ त्रिज्या AS = BS, $\therefore$ AB = b = D θ जहाँ θ रेडियन में है।

अतः $D = \frac{b}{\theta}$

(iii) अति सूक्ष्म दूरियों का मापन, अणु का आकार :

अणु के व्यास (10^{-8} m से 10^{-10} m) जैसी अत्यंत सूक्ष्म दूरियों के मापन के लिए हमें विशिष्ट विधियों का अनुसरण करना होता है। इनके लिए हम पेंचमापी जैसी मापक–यंत्रों का उपयोग नहीं कर सकते। यहाँ तक कि सूक्ष्मदर्शी की भी अपनी कुछ सीमाएँ हैं।

ओलीक अम्ल अणु के साइज़ का आकलन करने की एक सरल विधि नीचे दी गई है। ओलीक अम्ल एक साबुनी द्रव है जिसके अणु का साइज़ 10^{-9} m कोटि का है।

इस विधि का मूल आधार, जल के पृष्ठ पर ओलीक अम्ल की एक एकाण्विक परत बनाना है।

इसके लिए, पहले हम 1 cm^3 ओलीक अम्ल को ऐलकेहॉल में घोट कर 20 cm^3 घोल बनाते हैं। इस घोल का 1 cm^3 लेकर ऐल्कोहॉल में पुनः 20 cm^2 घोल बनाते हैं। अब इस घोल की सांद्रता $\left(\frac{1}{20 \times 20}\right)$ cm^3 ओलीक अम्ल/cm^3 घोल हुई। इसके बाद एक बड़े नांद में पानी लेकर, उसके ऊपर, लायकोपोडियम पाउडर छिड़क कर, लाइकोपोडियम पाउडर की एक पतली फिल्म जल के पृष्ठ के ऊपर बनाते है। फिर ओलीक अम्ल के पहले बनाए गए घोल की एक बूंद इसे ऊपर रखते हैं। ओलीक अम्ल की एक बूंद जल के पृष्ठ के ऊपर लगभग वृत्ताकार, एक अणु मोटाई की फिल्म के रूप में फैल जाती है। इस प्रकार बनी तनु फिल्म का व्यास मापकर कर इसका क्षैत्रफल A ज्ञात किया जा सकता है। हमने जल के पृष्ठ पर n बूंदें ओलीक अम्ल घोल की डालीं। यदि प्रारंभ में ही हम एक बूंद का अनुमानित आयतन (V cm^3) ज्ञात कर लें,

तो घोल की n बूंदों का आयतन = nV cm^3

इस घोल में विद्यमान ओलीक अम्ल का आयतन

$= nV\left(\frac{1}{20 \times 20}\right) cm^3$

ओलीक अम्ल का यह घोल तेल में से जल के पृष्ठ पर फैल कर t मोटाई की पतली फिल्म बना लेता है। यदि इस फिल्म का क्षेत्रफल A cm^2 है, तो फिल्म की मोटाई

$$t = \frac{\text{फिल्म का आयतन}}{\text{फिल्म का क्षेत्रफल}} \quad \text{या,} \quad t = \frac{nV}{20\times20A}\ \text{cm}$$

यदि हम यह मान लें कि फिल्म एक एकाण्विक मोटाई की है तो t ओलीक अम्ल के अणु की आमाप अथवा व्यास बन जाता है। इस मोटाई का मान 10^{-9} m की कोटी का आता है।

5.1 लम्बाइयों का परास (RANGE OF LENGTHS):

हमें विश्व में जो पिण्ड दिखाई देते हैं उन पिण्डों की आमापों के अंतर का एक विस्तृत परास है। जिसमें एक ओर 10^{-14} m कोटि की आमाप का किसी परमाणु का सूक्ष्म नाभिक है, तो दूसरी ओर 10^{26} m कोटि की आमाप का दृश्यमान विश्व का परास है।

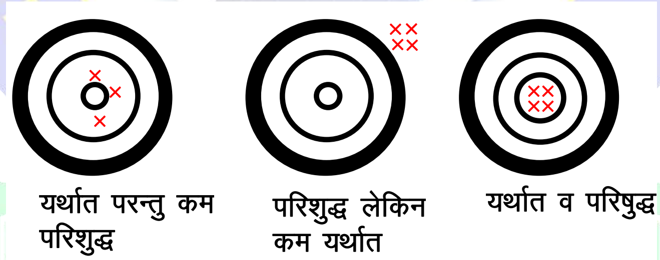
5.2 द्रव्यमान का मापन (MEASUREMENT OF MASS) :

द्रव्यमान पदार्थ का एक आधारभूत गुण है। यह पिण्ड के ताप, दाब में उसकी अवस्थिति पर निर्भर नहीं करता। द्रव्यमान का SI मात्रक किलोग्राम (kg) है।

सामान्य वस्तुओं के द्रव्यमान मापन के लिए हम उसी तरह की सामान्य तुला का उपयोग करते हैं जैसी किराने की दुकान में पाई जाती है। विश्व में पाए जाने वाले विशाल पिण्डों जैसे ग्रहों, तारों आदि के द्रव्यमान ज्ञात करने के लिए हम न्यूटन के गुरूत्वाकर्षण के नियम का उपयोग करते हैं। अति सूक्ष्म कणों, जैसे परमाणुओं, अवपरमाणुक कणों आदि के लघु द्रव्यमानों के मापन के लिए हम द्रव्यमान–स्पेक्ट्रमलेखी का प्रयोग करते हैं, जिसमें, एकसमान विद्युत एवं चुम्बकीय क्षेत्र में गतिमान, आवेशित कणों के प्रक्षेप–पथ की त्रिज्या उस कण के द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होती है।

5.3 उपकरण की यथार्थता, परिशुद्धता (ACCUARCY, PRECISION OF INSTRUMENT) :

- **यथार्थता** → मापे गये कि भौतिक राशियो के वास्तविक मान से निकटता
- **परिशुद्धता** → यह उस सीमा का मापन जिससे भौतिक राशियो का क्रमागत माप एक दूसरे से भिन्न होते हैं।



➢ यह उस सीमा तक का मापन है जिससे भौतिक राशि का क्रमागत मापन दूसरे से भिन्न है।

मापन की यथार्थता कई कारकों पर निर्भर कर सकती है। जिनमें मापक यंत्रों का विभेदन या सीमा भी सम्मिलित है।

उदाहरण के लिए, माना कि किसी लम्बाई का वास्तविक मान 3.678 cm है।

प्रथम प्रयोग में 0.1 cm विभेदन का मापक–यंत्र प्रयोग करके इसका मान 3.5 cm मापा गया, जबकि।

दूसरे प्रयोग में अधिक विभेदन वाला (माना 0.01 cm) मापक यंत्र प्रयोग करके इसी लंबाई को 3.88 cm मापा गया है।

यहाँ पहला माप अधिक यथार्थ है (क्योंकि वास्तविक मान के निकट है) परन्तु कम परिशुद्ध है (क्योंकि इसका विभेदन केवल 0.1 cm है।) जबकि, दूसरा माप कम यथार्थ परन्तु अधिक परिशुद्ध है। अतः मापन में त्रुटियों के कारण हर माप एक सन्निकट माप है।

6. मापन में त्रुटियाँ (ERRORS IN MEASUREMENT):

मपन में त्रुटिया

- क्रमबद्ध त्रुटिया
  - यंत्रगत त्रुटि
  - प्रायोगिक तकनिक या विधि से अपूर्णता
  - व्यक्तिगत या अवलोकन त्रुटि
  - पर्यावरण त्रुटि
- यादृच्छिक त्रुटिया
- अल्पतमांक त्रुटि

भौतिक राशियो के वास्तिवक मान और अनुमानित मान के बीच के अन्तर को त्रुटि कहा जाता हैं

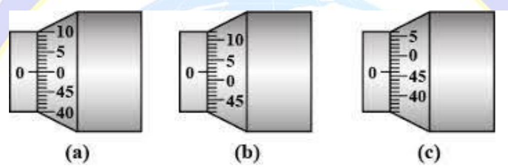
6.1 क्रमबद्ध त्रुटियाँ:

क्रमबद्ध त्रुटियाँ वे त्रुटियाँ हैं जो किसी एक दिशा धनात्मक या फिर ऋणात्मक में प्रवृत्त होती हैं। क्रमबद्ध त्रुटियों के कुछ स्त्रोत निम्नलिखित हैं :

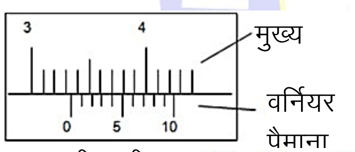
(i) यंत्रगत त्रुटियाँ (Instrumental error):

ये त्रुटियाँ मापक यंत्र की अपूर्ण अभिकल्पना, त्रुटिपूर्ण अंशांकन या शून्यांक–त्रुटि आदि के कारण होती हैं।

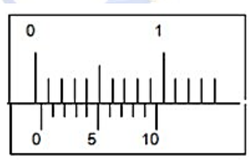
यंत्र मे शून्य त्रुटि



अशून्य त्रुटि | धनात्मक शून्य त्रुटि | ऋणात्मक शून्य त्रुटि



मापी गयी = 3.3 + 0.04 = 3.34

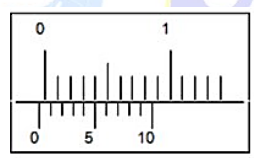


धनात्मक त्रुटि = 0.04

वर्नियर पैमाना शुद्ध मुख्य पैमाना के बायीं ओर हैं

सही मापन धनात्मक त्रुटि के लिए

= 3.34 – 0.04 = 3.30



ऋणात्मक त्रुटि - 0.04

वर्नियर पैमाना मुख्य पैमाना शून्य के दायीं ओर है

सही मापन ऋणात्मक त्रुटि के लिए

= 3.34-(-0.04)=3.38

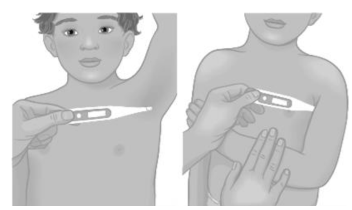
SPOT LIGHT

NOTE: अन्तिम परिणाम में धनात्मक शून्य त्रुटि को घटाते है लेकिन ऋणात्मक शून्य त्रुटि जोडी जाती है।

(ii) प्रायोगिक तकनिक या विधि से पूर्णता :

क्रमबद्ध त्रुटियाँ अच्छी प्रायोगिक तकनिक, अच्छे उपकरणों के चयन तथा व्यक्ति के द्वारा की गयी गलतियों को हटाकर कम से कम किया जा सकता है ।

उदाहरण के लिए: मानव शरीर का तापमान निर्धारित करने के लिए, बगल के नीचे रखा गया थर्मामीटर हमेशा शरीर के तापमान के वास्तविक मान से कम तापमान देगा।



➢ दी गई व्यवस्था के लिए इन त्रुटियों को एक निश्चित सीमा तक अनुमानित किया जा सकता है तथा आवश्यक संशोधन पाठ्याकों में आरोपित किया जा सकता है

(iii) व्यक्तिगत त्रुटियाँ (Personal errors) :

ये त्रुटियाँ, प्रेक्षक के किसी पूर्वाग्रह, उपकरण के समंजन में रह गई कमी या प्रेक्षण लेते समय प्रेक्षक द्वारा उचित सावधानियाँ न बरतने आदि के कारण होती हैं।

e.g.

(i) दो पैमाने बिंदुओं के बीच सूचक का गलत आकलन

(ii) विलयन का रंग देखना

(iv) पर्यावरणीय त्रुटि :–

इस प्रकार की त्रुटि तब प्रकट होती है जब पर्यावरण में कुछ कारक, जैसे कि एक असामान्य घटना, (हवा, प्रयोगशाला में आर्द्रता) त्रुटि की ओर ले जाती है।

उदा. हम एक सेब के द्रव्यमान को मापना चाहते हैं, लेकिन हमारी कक्षा हवादार है, हवा के कारण पैमाना गलत हो सकता है।

6.2 यादृच्छिक त्रुटियाँ :

मापन में अनियमित रूप से होने वाली त्रुटियों को यादृच्छिक त्रुटियाँ करते हैं ओर इसलिए ये चिह्न और परिमाण में यादृच्छिक हैं। यादृच्छिक त्रुटियाँ, प्रयोगिक अवस्थाओं में होन वाले यादृच्छिक तथा अननुमेय उतार–चढ़ाव के कारण तथा पाठ्यांक के समय प्रेक्षक द्वारा की गई (पूर्वाग्रह रहित) व्यक्तिगत त्रुटियों आदि के कारण होती हैं।

अतः चिन्ह व आकार से जाना जाता है। इन्हें प्रदर्षित करते हैं = $A \pm a$

जहाँ A = मापी गई मात्रा, a = इसकी सीमा त्रुटि का परिमाण।

6.3 अल्पतमांक त्रुटि :

किसी मापक यंत्र द्वारा मापा जा सकने वाला छोटे से छोटा मान उस मापक यंत्र का अल्पतमांक कहलाता है। किसी मापक यंत्र द्वारा लिए गए सभी पाठ्यांक या मापित मान उसके अल्पतमांक तक ही सही होते हैं।

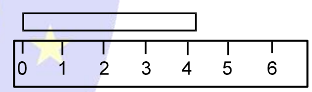
अल्पतमांक त्रुटि एक ऐसी त्रुटि होती है जो मापक यंत्र के विभेदन से संबद्ध होती है।

For Example

(i) सेमी स्केल का उपयोग करते हैं:

हम लंबाई = 4 सेमी मापेंगे

हालाँकि लंबाई 4 से थोड़ी अधिक होगी, लेकिन हम इसकी लंबाई 4.1 सेमी या 4.2 सेमी नहीं कह सकते, क्योंकि पैमाना केवल सेमी तक ही माप सकता है, उससे अधिक नहीं।



(cm scale)

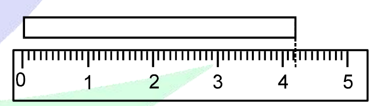
* यह (यह पैमाना) सेमी सटीकता तक ही माप सकता है।

* अतः हम कहेंगे कि इसका अल्पतमांक 1 सेमी है

(ii) मिमी स्केल का उपयोग करते हैंरू

हम लंबाई मापेंगे "λ"= 4.2 सेमी,

जो अधिक निकट माप है।



(mm scale)

यहाँ भी अगर हम बारीकी से देखें तो पाएंगे कि लंबाई 4.2 से थोड़ी अधिक है, लेकिन हम इसकी लंबाई 4.21, या 4.22, या 4.20 नहीं कह सकते क्योंकि यह पैमाना केवल 0.1 सेमी (1 मिमी) तक माप सकता है, इससे अधिक निकट नहीं।

अधिक निकट माप प्राप्त करने के लिए, हमें एक अधिक सूक्ष्म मापनी, जो कि mm पैमाना है, का उपयोग करना पड़ता है

* यह (यह पैमाना) 0.1 सेमी (1 मिमी) की सटीकता तक माप सकता है

इसका अल्पतमांक 0.1 सेमी (1 मिमी) है।

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform

DETECTIVE MIND

वर्नियर कैलिपर का अल्पतमांक (Least Count of vernier callipers) :

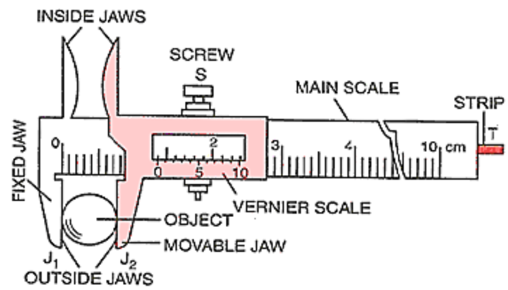
माना की एक मुख्य पैमाने के भाग (M.S.D.) का आकार M इकाई एवं एक वर्नियर पैमाने के भाग (V. S. D.) का आकार V इकाई है। माना की मुख्य पैमाने भाग की लम्बाई 'a', वर्नियर पैमाने भाग की लम्बाई 'b' के बराबर होती है।

$$aM = bV \Rightarrow V = \frac{a}{b}M$$

$$\therefore\ M - V = M - \frac{a}{b}M \text{ or } M - V = \left(\frac{b-a}{b}\right)M$$

राशि (M– V) वर्नियर नियताक (V. C.) या अल्पतमांक (L. C.)

$$\boxed{L.C. = M - V = \left(\frac{b-a}{b}\right)M}$$



Reading = MSR + VSD × LC

SPOT LIGHT

- एक उपकरण द्वारा सभी रीडिंग या मापा मूल्य केवल सबसे कम गिनती तक ही अच्छे होते हैं

6.4 अनुमत त्रुटि:

उपकरण की सीमाओं (अल्पतमांक) के कारण मापन में त्रुटि अनुमत त्रुटि कहलाती है।

mm पैमाने से → हम 1 mm यर्थायता (अल्पतमांक) मापन कर सकते है। इसमें हम मापन प्राप्त करेंगे।

For example: mm स्केल द्वारा → हम 1 mm सार्थकता तक माप सकते हैं। (अल्पतमांक). जैसे ℓ = 34 mm

अधिकतम अनिश्चितता 1 mm हो सकती है।

अधिकतम अनुमत त्रुटि ($\Delta\ell$) = 1 mm

- परन्तु यदि किसी अन्य उपकरण से, हम ℓ = 34.5 mm प्राप्त करते हैं तो अधिकतम अनुमत त्रुटि ($\Delta\ell$) = 0.1 mm तथा यदि अधिक यर्थाथ उपकरण से, हम ℓ = 34.527 mm प्राप्त करते है तो अनुमत त्रुटि ($\Delta\ell$) = 0.001 mm = अंतिम संख्या का मान रखते है।

6.5 प्रत्येक मापन राशि मे त्रुटि के परिणामस्वरूप अधिकतम अनुमत त्रुटि :

माना परिणाम f(x, y) में दो मापन राशियां x व y है।

माना x में त्रुटि = ± Δx अर्थात्, $x \in (x - \Delta x, x + \Delta x)$

माना y में त्रुटि = ± Δy अर्थात्, $y \in (y - \Delta y, y + \Delta y)$

Case : (I) यदि f(x, y) = x + y

$df = dx + dy$

$f = \Delta f = \pm \Delta x \pm \Delta y$

f अधिकतम अनुमत त्रुटि = $(\Delta f)_{max} = (\pm \Delta x \pm \Delta y)$ का अधिकतम

$(\Delta f)_{max} = \Delta x + \Delta y$

Case : (II) यदि f = x – y

$df = dx - dy$; $(\Delta f) = \pm \Delta x \mp \Delta y$

f में अधिकतम अनुमत त्रुटि = $(\Delta f)_{max}$

= $(\pm \Delta x \mp \Delta y)$ का अधिकतम

$\Rightarrow (\Delta f)_{max} = \Delta x + \Delta y$

- अधिकतम अनुमत त्रुटि प्रान्त करने के लिए, चिन्ह् व्यवस्थित होने चाहिए ताकि अधिकतम प्रभाव होन के लिए त्रुटियो को जोड़ दिया गया है।

अर्थात् $f = 2x - 3y - z$

$(\Delta f)_{max} = 2\Delta x + 3\Delta y + \Delta z$

7. निरपेक्ष त्रुटि, आपेक्षिक त्रुटि एवं प्रतिशत त्रुटि (Absolute error, relative error and perceritage error):

माना कि कुछ राशियों के मापन के लिए, हम कई प्रेक्षण $a_1, a_2, a_3 .... a_n$ लेते है। प्रत्येक मापन में निरपेक्ष त्रुटि तथा प्रतिशत त्रुटि ज्ञात करने के लिए, हम इन पदो (steps) का अनुसरण करते है।

➢ सर्वप्रथम सभी प्रेक्षणों के माध्य की गणना करते है:

$$a_{माध्य} = \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)}{n}$$

इन मानों का माध्य मापन की दी गई शर्तो के अधीन राशि के सबसे सम्भव मान के रूप में लिया जाता है।

7.1 निरपेक्ष त्रुटि (Absolute Error) :

राशि के सबसे सम्भव या माध्य मान तथा अलग–अलग मापन मान के मध्य अन्तर का परिमाण मापन की निरपेक्ष त्रुटि कहलाती है। अलग–अलग मापन मान मे निरपेक्ष त्रुटि है :

$$\boxed{\Delta a_n = |a_{mean} - a_n|}$$

सभी निरपेक्ष त्रुटियो का समान्तर माध्य अन्तिम या माध्य निरपेक्ष त्रुटि के रूप में लिया जाता है।

$$\Delta a_{mean} = \frac{(|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + |\Delta a_3| + ... + |\Delta a_n|)}{n}$$

7.2 आपेक्षिक त्रुटि

माध्य निरपेक्ष त्रुटि तथा समान्तर माध्य का अनुपात आपेक्षिक त्रुटि कहलाता है।

$$\text{आपेक्षिक त्रुटि} = \frac{\Delta a_{माध्य}}{a_{माध्य}}$$

7.3 प्रतिशत त्रुटि

जब आपेक्षिक त्रुटि को प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है, तो यह प्रतिशत त्रुटि कहलाता है।

$$\text{प्रतिशत त्रुटि} = \frac{\Delta a_{माध्य}}{a_{माध्य}} \times 100\%$$

8. त्रुटियों का संयोजन (COMBINATION OF ERRORS):

8.1 योग व अन्तर की त्रुटि :

➢ **योगफल में :** यदि $Z = A + B$, then $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$, इस स्थिति में अधिकतम आंशिक त्रुटि

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A+B} + \frac{\Delta B}{A+B} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A+B}$$

➢ **अन्तर में :** यदि $Z = A - B$ तो अधिकतम निरपेक्ष त्रुटि $\Delta Z = \Delta A + \Delta B$ तथा इस स्थिति में अधिकतम आंशिक त्रुटि

$\Delta Z = \Delta A + \Delta B$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A-B} + \frac{\Delta B}{A-B} = \frac{\Delta A + \Delta B}{A-B}$$

➢ **गुणनफल में :** यदि $Z = AB$ तो अधिकतम आंशिक त्रुटि

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

जहाँ $\Delta Z/Z$ आंशिक त्रुटि कहलाती है

➢ भाग (Division) में : यदि $= A/B$, तो अधिकतम आंशिक त्रुटि है :

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

➢ **घात में :** यदि $Z = A^n$ है तो $\frac{\Delta Z}{Z} = n\frac{\Delta A}{A}$

SPOT LIGHT

- सामान्य रूप में यदि $Z = \frac{A^x B^y}{C^q}$

  तो Z में अधिकतम आंशिक त्रुटि है : $\frac{\Delta Z}{Z} = x\frac{\Delta A}{A} + y\frac{\Delta B}{B} + q\frac{\Delta C}{C}$

9. सार्थक अंक (SIGNIFICANT FIGURES):

हर मापन में त्रुटियाँ सम्मिलित होती हैं। अतः मापन के परिणामों को इस प्रकार प्रस्तुत किया जाना चाहिए कि मापन की परिशुद्धता स्पष्ट हो जाए।

- साधारणतः, मापन के लिए परिणामों को एक संख्या के रूप में प्रस्तुत करते हैं जिसमें वह सभी अंक सम्मिलित होते हैं जो विश्वसनीय हैं, तथा वह प्रथम अंक भी सम्मिलित किया जाता है जो अनिश्चित हैं, तथा वह प्रथम अंक भी सम्मिलित होते हैं जो विश्वसनीय हैं, तथा वह प्रथम अंक भी सम्मिलित किया जाता है जो अनिश्चित हैं विश्वसनीय अंकों ओर पहले अनिश्चित अंक को संख्या के सार्थक–अंक माना जाता है।
- सार्थक अंक मापन की परिशुद्धता इंगित करते हैं जो मापक यंत्र के अल्पमांक पर निर्भर करती हैं। किसी मापन में विभिन्न मात्रकों के परिवर्तिन के चयन से सार्थक अंकों की संख्या परिवर्तित नहीं होती।

9.1 सार्थक अंक ज्ञात करने के नियम :

नियम 1 : सभी अशून्य अंक सार्थक अंक होते है।।

अर्थात् 123.56 में पांच सार्थक अंक है।

Rule 2: **नियम 2 :** दो अशून्य अंकों के मध्य आने वाले अंक सार्थक अंक (स्पष्टतः) कहलाते है।

अर्थात् 1230.05 में छः सार्थक अंक है।

Rule 3:

$\ell = 3.5$cm	$\ell = 3.50$cm	$\ell = 3.500$cm
↓	↓ closer!	↓ more closer!
0.1cm accuracy	0.01cm accuracy	0.001cm accuracy
↓	↓	↓
ℓ lies between (3.4 – 3.6)	ℓ lies between (3.49 – 3.51)	ℓ lies between (3.499 – 3.501)

दशमलव बिन्दु के पश्चात् आने वाले शून्य सार्थक अंक होते है। (ज्यादा यथार्थता या दक्षता (accuracy) दर्शाते हैं)

3.5cm	3.50cm	3.500cm
↓	↓	↓
दो S.F	तीन S.F	चार S.F

एक बार मापन होने के पश्चात्, सार्थक अंक मापन की निकटता के अनुसार निर्धारित हो जाते हैं।

- अब यदि इस मापन को विभिन्न मात्रकों में दर्शाएं तो, सार्थक अंक परिवर्तित नहीं होते (सार्थक अंक केवल मापन की यर्थाथता पर निर्भर करता है।)

SPOT LIGHT

सार्थक अंक हमेशा संरक्षित रहते है, मात्रक परिवर्तित होने पर भी सार्थक अंक परिवर्तित नहीं होते।

माना की mm पैमाने का उपयोग करके मापन किया गया है, तथा $\ell = 85$ mm (दो सार्थक अकं)

यदि हम इसे दो अन्य इकाई मे प्रदर्शित करना चाहते है।

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

85mm $\rightarrow$ 8.5cm $\rightarrow$ 0.085

$\downarrow$ $\downarrow$

8500mm 0.000085km

$= 8.5 \times 10^4$ mm $= 8.5 \times 10^{-5}$ km

सभी दो सार्थक अकं रखते है

दिये गये नियम सार्थक अंक का पालन करते है।

Rule 4: पिछले उदाहरण में हमने देखा की,

0.000085km $\longrightarrow$ दो सार्थक अंक

$\downarrow$ (0000)

सार्थक अंक नहीं

8 व 5, इसलिए आगे वाले शून्य सार्थक अंक नही होते है।

- एक से कम वाली संख्या में दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले तथा प्रथम अशून्य अंक के पहले आने वाले शून्य सार्थक अंक नहीं होते है। (केवल मात्रक के परिवर्तन के कारण होते है।)

0.000305 सार्थक अंक 3 है।

$\Rightarrow$ 3.05×10^{-4} सार्थक अंक 3 है।

Rule 5: पिछले उदाहरण से हम देखते है की

85000μm $\longrightarrow$ दो सार्थक अंक होना चाहिए

$\downarrow$ (000)

सार्थक अंक नही

8 व 5 इसलिए पीछे वाले शून्य सार्थक नही है।

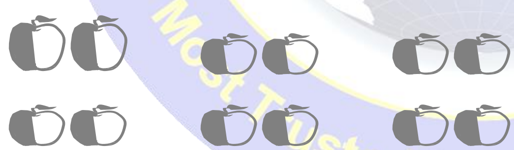
- बिना दशमलव बिन्दु वाले अंकों के सिरों या अन्त में आने वाले शून्य सार्थक अंक नहीं होते (केवल मात्रक परिवर्तन के कारण होते है।)

154 मी0 = 15400 सेमी0 = 15400 मिमी0

$= 154 \times 10^9$ नैनोमीटर

सभी में सार्थक अंक तीन है। बाद में आने वाले शून्य सार्थक अंक नहीं है।

Rule 6 : यहां कुछ निश्चित मापन दिया है जो कि पूर्ण है अर्थात्



सेबों की संख्या = 12 (ठीक exact)

= 12.000000........... ∞

इस तरह के मापन में अनन्त यर्थाथता होती है। अत: इसमें ∞ सार्थक अंक होते है।

* कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या = 125 (ठीक)

* निर्वात में प्रकाश की चाल = 299,792,458 m/s (ठीक)

9.2 सार्थक अंकों से संबंधित अंकीय संक्रियाओं के नियम:

- संख्याओं को गुणा या भाग करने से प्राप्त परिणाम में केवल उतने ही सार्थक अंक रहने देना चाहिए जितने कि सबसे कम सार्थक अंकों वाली मूल संख्या में है।

  E.g. $1.2 \times 1.11 = 1.3$

- संख्याओं के संकलन अथवा व्यवकलन से प्राप्त अंतिम परिणाम में दशमलव के बाद उतने ही सार्थक अंक रहने देने चाहिए जितने कि संकलित या व्यवकलित की जाने वाली किसी राशि में दशमलव के बाद कम से कम हैं।.

KHAN GLOBAL STUDIES Most Trusted Learning Platform KHAN SIR

E.g. 1.235 – 1.1 = 0.135 = 0.1

(∵ द्वितीय पद कम होते है जिसका अर्थ है एक दषमलव स्थान)

10. अनिश्चित अंकों का पूर्णांकन (ROUNDING OFF THE UNCERTATIN DIGITS) :

जिन संख्याओं में एक से अधिक अनिश्चित अंक होते हैं, उनके अभिकलन में परिणाम का पूर्णांकन किया जाना चाहिए। अधिकांश प्रकरणों में, संख्याओं को उचित सार्थक अंकों तक पूर्णांकित करने के नियम स्पष्ट ही हैं।

पूर्णांकित करने के नियम :

- जिस संख्या को पूर्णांकित करना है यदि वह 5 (50%) ; से कम है तो उसे छोड़ दें।

47.833 दशमलव के एक स्थान तक पूर्णांकित कर $\xrightarrow[\text{दशमलव के एक स्थान तक}]{\text{पूर्णांक}}$ 47.8

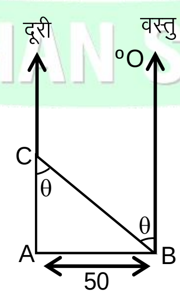
- यदि पूर्णांकित करने वाली संख्या 5(50%), से अधिक हो तो अंतिम संख्या को 1 बढ़ा दो।

47.862 दशमलव के एक स्थान तक पूर्णांकित करें $\xrightarrow[\text{दशमलव के एक स्थान तक}]{\text{पूर्णांक}}$ 47.9

- जब हटाई संख्या 5 हो (50%)
  - यदि अंतिम अंक सम हो तो 5 को हटाओ: 20.65 → 20.6
  - यदि अंतिम अंक विषम हो तो अंतिम अंक में 1 बढाये: 20.75 → 20.8

SOLVED EXAMPLES

Example: 13 एक व्यक्ति अपने पास की किसी मीनार की अपने से दूरी का आकलन करना चाहता है। वह मीनार C के सामने किसी बिन्दु A पर खड़ा होता है ओर AC की सीध में बहुत दूर स्थित किसी बिन्दु O को देखता है। फिर वह, AC के लम्बवत् 50 m, दूर स्थित बिन्दु B तक चलता है और वहाँ से O एवं C को फिर देखता है। क्योंकि O बहुत अधि दूरी पर है, BO एवं AO की दिशाएँ व्यावहारिक रूप में एक ही है, लेकिन वह पाता है कि C की दृष्टि रेखा मूल दृष्टि रेखा के सापेक्ष θ = 30º पर घूम गई है (θ को लम्बन कहा जाता है)। उसकी मूल स्थिति A से मीनार C की दूरी का आकलन कीजिए।



(1) $\sqrt{3}$ m (2) 50$\sqrt{3}$ m (3) 20$\sqrt{3}$ m (4) 27$\sqrt{3}$ m

Solution: दिया गया है, लम्बन कोण θ = 30°

चित्र से AB = AC tan θ

AC = AB / tan θ = 50 m / tan 30° = 50$\sqrt{3}$ m

Example: 14 पृथ्वी के दो व्यासतः विपरीत बिन्दुओं A व B से चन्द्रमा का प्रेक्षण की दो दिशाओं के बीच, चन्द्रमा पर अंतरित कोण θ की माप 2º है। पृथ्वी का व्यास लगभग 1.276×10^7 m है। पृथ्वी के चन्द्रमा की दूरी का अभिकलन कीजिए।

(1) 36.55×10^7 m (2) 38.66×10^{12} m
(3) 36.55×10^9 m (4) 39.66×10^5 m

Solution: ज्ञात है $\theta = 2^\circ = 2 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{90}$

Also, $b = AB = 1.276 \times 10^7$ m

$D = b/\theta = \frac{1.276 \times 10^7}{\frac{\pi}{90}} = 36.55 \times 10^7$ m

Example: 15 राष्ट्रीय प्रयोगशाला में स्थित एक मानक घड़ी से तुलना करके दो घडियों की जाँच की जा रही है। मानक घड़ी जब दोपहर के 12:00:00 का समय दर्शाती है, तो इन दो घड़ियों के पाठ्यांक इस प्रकार हैं :

	घड़ी 1	**घड़ी 2**
सोमवार	12:00:05	10:15:06
मंगलवार	12:01:15	10:14:59
बुधवार	11:59:08	10:15:18
बृहस्पतिवार	12:01:50	10:15:07
शुक्रवार	11:59:15	10:14:53
शनिवार	12:01:30	10:15:24
रविवार	12:01:19	10:15:11

यदि आप कोई ऐसा प्रयोग कर रहे हो जिसके लिए आपको परिशुद्ध समय अंतराल मापन की आवश्यकता है, तो इनमें से आप किस घड़ी को वरीयता देंगे ? क्यों ?

Solution: सात दिन में घड़ी 1 के प्रेक्षणों में अंतर का परिसर 162 s है जबकि घड़ी 2 में यह परिसर 31s का हैं। घड़ी 1 द्वारा लिए गए समय के पाठ्यांक, घड़ी 2 द्वारा लिए गए समय के पाठ्यांको की तुलना में, मानक समय के अधिक निकट हैं। महत्वपूर्ण बात यह है घड़ी की शून्यांक त्रुटि, परिशुद्ध कार्य के लिए उतनी महत्वपूर्ण नहीं है जितना इसके समय में होने वाला परिवर्तन है, क्योंकि, शून्यांक त्रुटि को तो कभी भी सरलता से दूर किया जा सकता है। अतः घड़ी 1 की तुलना में घड़ी 2 को वरीयता दी जाएगी।

Example: 16 एक वर्नियर केलिपर्स की सहायता से एक बेलन की लम्बाई का मापन करके निम्न प्रेक्षण लिए गए है : 3.29 cm, 3.28 cm, 3.29 cm, 3.31 cm, 3.28 cm, 3.27 cm, 3.29 cm, 3.30cm तो ज्ञात कीजिऐ :

(a) बेलन की सबसे यर्थाथ लम्बाई (b) प्रत्येक प्रेक्षण से निरपेक्ष त्रुटि
(c) माध्य निरपेक्ष त्रुटि (d) आपेक्षिक त्रुटि
(e) प्रतिशत त्रुटि

निरपेक्ष त्रुटि तथा प्रतिशत त्रुटि के पदो में परिणाम व्यक्त कीजिऐ।

Solution: (a) बेलन की सबसे यर्थाथ लम्बाई माध्य लम्बाई $\left(\overline{\ell}\right)$ = 3.28875 cm = 3.29 cm होगी।

(b) प्रथम पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.29 – 3.29 = 0.00 cm
द्वितीय पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.29 – 3.28 = 0.01 cm
तृतीय पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.29 – 3.29 = 0.00 cm
चर्तुथ पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.39 – 3.31 = –0.02 cm
पाचँवी पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.29 – 3.28 = 0.01 cm
छःठी पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.29 – 3.27 = 0.02 cm
सातवीं पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.29 – 3.29 = 0.00 cm
अंतिम पाठयांक में निरपेक्ष त्रुटि = 3.29 – 3.30 = –0.01 cm

(c) माध्य निरपेक्ष त्रुटि

$$\overline{\Delta\ell} = \frac{0.00+0.01+0.00+0.02+0.01+0.02+0.00+0.01}{8} = 0.01 \text{ cm}$$

(d) लम्बाई में आपेक्षिक त्रुटि = $\frac{\overline{\Delta\ell}}{\ell} = \frac{0.01}{3.29}$ = 0.0030395 = 0.003

(e) प्रतिशत त्रुटि = $\frac{\overline{\Delta\ell}}{\overline{\ell}} \times 100 = 0.003 \times 100 = 0.3\%$

अतः लम्बाई ℓ = 3.29 cm ± 0.01 cm (निरपेक्ष त्रुटि के पदो में)

$\Rightarrow \ell$ = 3.29 cm ± 0.30% (प्रतिशत त्रुटि के पदो में)

Example: 17 कुछ प्रेक्षणो मे, 'g' का मान 9.81, 9.80, 9.82, 9.79, 9.78, 9.84, 9.79, 9.78, 9.79 व 9.80 m/s^2 है। g में निरपेक्ष त्रुटि व प्रतिशत त्रुटि की गणना कीजिये।

(1) 0.014, 0.14%
(2) 0.024, 0.12%
(3) 0.016, 0.10%
(4) 0.121, 0.2%

Solution:

क्रम संख्या	**g का मान**	**निरपेक्ष त्रुटि** **Δg** = $\lvert g_i - \bar{g} \rvert$
1	9.81	0.01
2	9.80	0.00
3	9.82	0.02
4	9.79	0.01
5	9.78	0.02
6	9.84	0.04
7	9.79	0.01
8	9.78	0.02
9	9.79	0.01
10	9.80	0.00

$g_{mean} = 9.80,\ \Delta g_{mean} = \frac{\Sigma \Delta g_i}{10} = \frac{0.14}{10} = 0.014$

प्रतिशत त्रुटि = $\frac{\Delta g_{mean}}{g_{mean}} \times 100 = \frac{0.014}{9.80} \times 100\ \% = 0.14\ \%$

Example: 18 हम एक सरल लोलक का दोलन–काल ज्ञात करते हैं। प्रयोग के क्रमिक मापनों में लिए गए पाठ्यांक हैं : 2.63s, 2.56s, 2.42s, 2.7 एवं 2.80s । निरपेक्ष त्रुटि, आपेक्षिक त्रुटि एवं प्रतिशत त्रुटि परिकलित कीजिए।

Solution: लोलक का औसत दोलन काल,

$T = \frac{(2.63+2.56+2.42+2.71+2.80)s}{5} = \frac{1312}{5}$ = 2.624s = 2.62s = 2.624 s = 2.62 s

क्योंकि, सभी काल 0.01 s के विभेदन तक मापे गए हैं, इसलिए समय की सभी मापें दूसरे दशमलव स्थान तक हैं। इस औसत काल को भी दूसरे दशमलव स्थान तक लिखना उचित है।

मापन में त्रुटियाँ हैं :

2.63 s – 2.62 s = 0.01 s
2.56s – 2.62 s = –0.06 s
2.42s – 2.62 s = –0.20 s
2.71 s – 2.62 s = 0.09 s
2.80 s – 2.62 s = 0.18 s

ध्यान दीजिए, त्रुटियों के भी वही मात्रक हैं जो मापी जाने वाली राशियों के हैं।

सभी निरपेक्ष त्रुटियों का समांतर माध्य (समांतर माध्य के लिए हम केवल परिमाण लेते हैं) हैं :

$\Delta T_{माध्य}$ = [0.01 + 0.06 + 0.0 + 0.09 + 0.18)s]/5
= 0.54 s / 5 = 0.11 s

इसका अर्थ है कि सरल लोलक का दोलन काल (2.62 ± 0.11)s है। अर्थात् इसका मान (2.62 ± 0.11)s एवं (2.62 ± 0.11)s, अथवा 2.73 s एवं 2.51s के बीच है। क्योकि सभी निरपेक्ष त्रुटियों का समांतर माध्य 0.11 s है, अतः इस

मान में सेकंड के दसवें अंश मे पहले से ही त्रुटि है। इसलिए दोलन काल का मान सेंकण्ड के सौवें भाग तक व्यक्त करने का कोई अर्थ नहीं हैं। इसको व्यक्त करने का अधिक सही ढंग इस प्रकार है :

$T = 2.6 \pm 0.1$ s

ध्यान दीजिए, अंतिम संख्यांक 6 विश्वसनीय नहीं है, क्योंकि यह 5 एवं 7 के बीच कुछ भी हो सकता है। इस तथ्य को संकेत के रूप में इस प्रकार कहते हैं कि माप में दो सार्थक अंक है। इस प्रकरण में दो सार्थक अंक 2 तथा 6 हैं जिसमे 2 विश्वसनीय है और 6 में त्रुटि संबद्ध है।

इस उदाहरण में आपेक्षिक त्रुटि अथवा प्रतिशत त्रुटि है –

$$= \frac{0.01}{2.6} \times 100 = 4\%$$

Example: 19 $R_1 = 100 \pm 3$ ओम व $R_2 = 200 \pm 4$ ओम के दो प्रतिरोधकों को (a) श्रेणी क्रम में, (b) समान्तर क्रम में संयोजित किया गया है। (a) श्रेणी क्रम संयोजन तथा (b) समान्तर क्रम संयोजन में तुल्य प्रतिरोध ज्ञात कीजिए। (a) के लिए संबंध $R = R_1 + R_2$ एवं (b) के लिए $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ तथा $\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$ का उपयोग कीजिए।

Solution: (a) श्रेणी क्रम संयोजन का तुल्य प्रतिरोध,

$R = R_1 + R_2 = (100 \pm 3)$ ohm + (200 ± 4) ohm = 300 ± 7 ohm.

(b) समान्तर क्रम संयोजन का तुल्य प्रतिरोध,

$$R' = \frac{R_1R_2}{R_1R_2} = \frac{200}{3} = 66.7 \text{ ohm}$$

तब, $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ से हमें प्राप्त होता है :

We get,

$$\frac{\Delta R'}{R'^2} = \frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}$$

$$\Delta R' = (R'^2)\left[\frac{\Delta R_1}{R_1^2} + \frac{\Delta R_2}{R_2^2}\right]$$

$$\Delta R' = \left(\frac{66.7}{100}\right)^2 3 + \left(\frac{66.7}{200}\right)^2 4 = 1.8$$

अतः, $R' = 66.7 \pm 1.8$ ohm

(यहाँ सार्थक अंकों के नियमों को प्रमाणित करने की दृष्टि से ΔR का मान 2 के स्थान पर 1.8 के रूप में व्यक्त किया गया है।)

Example: 20 यदि $R = 1.05\ \Omega$, ताप व्यास $d = 0.60$ mm व लम्बाई $\ell = 75.3$ cm है तो प्रतिरोधकता = $\frac{R\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)}{\ell}$ में अधिकतम सम्भव त्रुटि ज्ञात कीजिऐ।

(1) 2% (2) 4 % (3) 0.2 % (4) 0.8%

Solution: $$\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)_{max} = \frac{\Delta R}{R} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

$R = 1.05\ \Omega \rightarrow \Delta R = 0.01\ \Omega$ (अल्पतमांक)

$d = 0.60$ mm $\rightarrow$ $\Delta d = 0.01$ mm (अल्पतमांक)

$\ell = 75.3 \rightarrow$ $\Delta \ell = 0.1$ cm (अल्पतमांक)

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left(\frac{0.01\Omega}{1.05\Omega} + 2\frac{0.01\text{mm}}{0.60\text{mm}} + \frac{0.1\text{cm}}{75.3\text{cm}}\right) \times 100 = 4\ \%.$$

Example: 21 एक सरल लोलक के उपयोग से 'g' का मान ज्ञात करने के लिए, $T = 2.00$ sec; $\ell = 1.00$ m मापा गया है। 'g' में अधिकतम सम्भव त्रुटि ज्ञात कीजिए। 'g' का मान भी ज्ञात कीजिए। ($\pi^2 = 10$)

Solution: $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2\ell}{T^2}$$

$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_{max} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + 2\frac{\Delta T}{T} = \left(\frac{0.01}{1.00} + 2\frac{0.01}{2.00}\right) \times 100\ \%.$ = 2 %

value of g = $\frac{4\pi^2 \ell}{T^2} = \frac{4 \times 10 \times 1.00}{(2.00)^2}$ = 10.0 m/s^2

$\left(\frac{\Delta g}{g}\right)_{max}$ = 2/100 so $\frac{\Delta g_{max}}{10.0} = \frac{2}{100}$

so $(\Delta g)_{max} = 0.2$ = max error in 'g'

so 'g' = (10.0 ± 0.2) m/s^2

Example: 22 Z में आपेक्षिक त्रुटि ज्ञात कीजिऐ यदि $Z = A^4B^{1/3}/CD^{3/2}$

Solution: Z में आपेक्षिक त्रुटि $\Delta Z / Z = 4(\Delta A/A) + (1/3)(\Delta B/B) + (\Delta C/C) + (3/2)(\Delta D/D)$

Example: 23 किसी सरल लोलक का दोलनकाल $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ होता है। यदि L का मापित मान 20.0 cm है जिसमें 1 mm तक की यथार्थता है और समय को 1s विभेदन वाली कलाई घड़ी से मापने पर यह पाया जाता है कि लोलक के 100 दोलनों का समय 90s है तो यहाँ g के निर्धारित मान की यथार्थता क्या है ?

(1) 2 % (2) 3 % (3) 1% (4) 5%

Solution: $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$

यहाँ, $T = \frac{t}{n}$ और $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta t}{t}$.

t दोनों के मापन की त्रुटियाँ अल्पतमांक त्रुटियाँ हैं।

अतः $(\Delta g/g) = (\Delta L/L) + (\Delta T/T)$

$(\Delta g/g) = (\Delta L/L) + (\Delta T/T) = \frac{0.1}{20.0} + 2\left(\frac{1}{90}\right) = 0.027$

अतः g के मापन में प्रतिशत त्रुटि

$100\,(\Delta g/g) = [100\,(\Delta L/L) + 2 \times 100\,(\Delta T/T)] = 3\%$

Example: 24 एक आयत की लम्बाई व चौड़ाई (5.7 ± 0.1) cm व (3.4 ± 0.2) cm है। त्रुटि सीमाओ के साथ आयत के क्षेत्रफल की गणना कीजिऐ।

(1) 19.38 ± 1.48 cm^2 (2) 18.28 ± 2.4 cm^2

(3) 20.20 ± 2.01 cm^2 (4) 21.21 ± 0.3 cm^2

Solution: दिया है ℓ = (5.7 ± 0.1) cm and b = (3.4 ± 0.2) cm

क्षेत्रफल $A = \ell \times b = 5.7 \times 3.4 = 19.38$ cm^2

$\frac{\Delta A}{A} = \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta b}{b}\right) = \pm\left(\frac{0.1}{5.7} + \frac{0.2}{3.4}\right) = \pm\left(\frac{0.34 + 1.14}{5.7 \times 3.4}\right) = \pm\frac{1.48}{19.38}$

$\Rightarrow \Delta A = \pm\frac{1.48}{19.38} \times A = \pm\frac{1.48}{19.38} \times 19.38 = 1.48$

क्षैत्रफल = (19.38 ± 1.48) cm^2

Example: 25 एक वस्तु (4.0 ± 0.3) s समय में (13.8 ± 0.2) m दूरी एकसमान रूप से तय करती है। त्रुटि सीमाओं के साथ इसका वेग ज्ञात कीजिऐ। वेग में प्रतिशत त्रुटि क्या है ?

(1) ± 8% (2) ± 2% (3) ± 9 % (4) ± 12 %

Solution: दिया है। दूरी s = (13.8 ± 0.2) m व

समय t = (4.0 ± 0.3) s,

वेग $v = \frac{s}{t} = \frac{13.8}{4.0}$ 3.45 ms^{-1} = 3.5 ms^{-1}

$\frac{\Delta v}{v} = \pm\left(\frac{\Delta s}{s} + \frac{\Delta t}{t}\right) = \pm\left(\frac{0.2}{13.8} + \frac{0.3}{4.0}\right) = \pm\left(\frac{0.8 + 4.14}{13.8 \times 4.0}\right) = \pm\frac{4.49}{13.8 \times 4.0} = \pm 0.0895$

$\Rightarrow \Delta v = \pm 0.0895 \times v = \pm 0.0895 \times 3.45 = \pm 0.3087 = \pm 0.31$

$\therefore$ v = (3.5 ± 0.31) ms^{-1}

वेग मे प्रतिशत त्रुटि = $\frac{\Delta v}{v} \times 100 = \pm 0.0895 \times 100 = \pm 8.95\% = \pm 9\%$

Example: 26 ओम नियम प्रयोग में, प्रतिरोध के परितः वोल्टमीटर का पाठ्यांक 12.5 V तथा धारा का पाठ्यांक i = 0.20 Amp है। सही सार्थक अंको में प्रतिरोध ज्ञात कीजिए ।

(1) 62 (2) 62.5 (3) 63 (4) 62.50

Solution: $R = \frac{V}{i} = \frac{12.5 \rightarrow 3SF}{0.20 \rightarrow 2SF} = 62.5\Omega \xrightarrow[\text{to2S.F.}]{\text{roundoff}} 62\Omega$

Example: 27 निम्न में सार्थक अंको की संख्या लिखिऐ।

(a) 165 (b) 2.05 (c) 34.000 m
(d) 0.005 (e) 0.02340 N m^{-1}

Solution: (a) 3 SF (b) 3 SF (c) 5 SF
(d) 1 SF (e) 4 SF

Example: 28 वर्नियर कैलिपर के मुख्य पैमाने पर एक सेमी को 10 बराबर भागो मे बाटा जाता है। यदि वर्नियर पैमाने के 20 खाने मुख्य पैमाने के 8 छोटे खानो के सम्पाती है तो वर्नियर कैलिपर का अल्पतमांक क्या होगा ?

Solution: वर्नियर पैमाने के 20 खाने = मुख्य पैमाने के 8 खाने

$\Rightarrow$ 1 V. S .D. = $\left(\frac{8}{20}\right)$ M. S. D. = $\left(\frac{2}{5}\right)$ M. S. D.

अल्पतमांक = 1 M. S. D. – 1 V. S . D.

= 1 M. S. D. – $\left(\frac{2}{5}\right)$ M. S. D. = $\left(1-\frac{2}{5}\right)$ M. S. D. = $\frac{3}{5}$ M .S .D. = $\frac{3}{5}\times$ 0.1 cm = 0.06 cm

($\because$1 M. S. D. = $\frac{1}{10}$ cm = 0.1 cm)

नोट : वस्तुनिष्ठ प्रश्नो के लिए

$$L.C. = M - V\left(\frac{b-a}{b}\right) = M = \left(\frac{20-8}{20}\right)\left(\frac{1}{10}\right) cm = \frac{3}{50} cm = 0.06\ cm$$

Example: 29 मुख्य पैमाने के n^{th} भाग वर्नियर पैमाने के $(n + 1)^{th}$ भाग से सम्पाती होते है एक मुख्य स्केल का भाग 'a' इकाई के बराबर है। वर्नियर का अल्पतमांक ज्ञात करे।

(1) $\frac{a}{n+1}$ (2) $\frac{n}{n+1}$ (3) $\frac{1}{n+1}$ (4) Zero

Solution: वर्नियर स्केल के(n + 1) भाग = मुख्य स्केल के n भाग

$\therefore$ 1 वर्नियर भाग = $\frac{n}{n+1}$ मुख्य स्केल भाग

अल्पतमांक = 1 M. S. D. – 1V. S. D.

= $\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$ M.S.D. = $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ M. S. D. = $\frac{a}{n+1}$

Example: 30 स्टॉप वॉच (stop watch) का अल्पतमांक $\frac{1}{5}$ सैकण्ड है। लोलक के 20 दोलनो का समय 25 सैकण्ड मापा गया है। समय के मापन के प्रतिशत त्रुटि क्या है ?

(1) 0.4 % (2) 0.6 % (3) 0.8 % (4) 12 %

Solution: 25 सैकण्ड को मापने के त्रुटि = $\frac{1}{5}$ sec. = 0.2 sec.

$\therefore$ प्रतिशत त्रुटि = $\frac{0.2}{25}\times 100$ = 0.8%

नोट : इस प्रकार के प्रश्नो के अंतिम परम त्रुटि मापक उपकरणो के अल्पतमांक के बराबर लेते ळें