

Chapter 01

सदिश (Vector)

CONTENT

- परिचय
- अदिश और सदिश राशियाँ
- एक सदिश का निरूपण
- सदिश के प्रकार
- सदिश का योग और व्यवकलन
- सदिश योग के गुण
- सदिश का व्यवकलन
- दो बिंदुओं के बीच की दूरी
- एक अदिश द्वारा एक सदिश से गुणन
- एक विभाजन बिंदु की स्थिति सदिश
- दो समांतर सदिशों के बीच संबंध
- तीन बिंदुओं की संरेख्यता
- समतलीय और गैर-समतलीय सदिश
- सदिशों का गुणनफल
- दो सदिशों का अदिश या बिंदु गुणनफल
- विशेष स्थितियों में अदिश गुणनफल
- अदिश गुणनफल के गुण
- दो सदिशों के बीच का कोण
- a के साथ और b के लंबवत घटक
- दो सदिशों का सदिश या गुणनफल
- विशेष स्थितियों में सदिश उत्पाद
- सदिश गुणनफल के गुण
- सदिश गुणनफल की ज्यामितीय व्याख्या
- त्रिभुज का क्षेत्रफल
- अदिश त्रिक गुणनफल
- सदिश त्रिक गुणनफल
- लैग्रेंज सर्वसमिका
- सदिशों की व्युत्क्रम निकाय

1. परिचय (INTRODUCTION):

सदिश एक वह राशि है जिसमें परिमाण और दिशा दोनों होते हैं। ज्यामितीय रूप से एक सदिश को एक निर्देशित रेखा खंड द्वारा दर्शाया जाता है

2. अदिश और सदिश राशियाँ (SCALAR AND VECTOR QUANTITIES)

एक भौतिक राशि जो पूरी तरह से केवल उसके परिमाण द्वारा निर्दिष्ट होती है, अदिश कहलाती है। इसे उपयुक्त इकाई के साथ एक वास्तविक संख्या द्वारा दर्शाया जाता है।

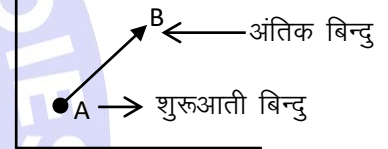
उदाहरण के लिए, दूरी, द्रव्यमान, लंबाई, समय, आयतन, गति, क्षेत्रफल अदिश हैं। दूसरी ओर, एक भौतिक राशि जिसमें परिमाण के साथ-साथ दिशा भी होती है, सदिश कहलाती है। उदाहरण के लिए, विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि सदिश राशियाँ हैं।

3. एक सदिश को निरूपण (REPRESENTATION OF A VECTOR)

ज्यामितीय रूप से एक सदिश को निर्देशित रेखा खंड द्वारा दर्शाया जाता है यदि एक

सदिश $\vec{a}$ के लिए, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ हो तब A को इसका प्रारंभिक बिंदु कहा जाता है और B को इसका अंतिम बिंदु कहा जाता है। स्पष्ट रूप से $\overrightarrow{AB}$ तथा $\overrightarrow{BA}$ विभिन्न रेखा खंडों को निरूपित करता है

यदि $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ हो तब इसका परिमाण $|\vec{a}|$ या $|\overrightarrow{AB}|$ या AB द्वारा व्यक्त किया जाता है



DETECTIVE MIND

➤ एक सदिश के लिए $\overrightarrow{AB} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

➤ एक सदिश का परिमाण हमेशा गैर ऋणात्मक वास्तविक संख्या होता है

4. सदिश के प्रकार (KINDS OF VECTORS)

4.1 शून्य या शून्य सदिश :

सदिश जिसका परिमाण शून्य होता है उसे शून्य या शून्य सदिश कहते हैं और इसे 0 या $\vec{0}$ से प्रदर्शित करते हैं शून्य सदिश को निरूपित करने वाले निर्देशित रेखा खंड के प्रारंभिक और अंतिम बिंदु समान होता है और इसकी दिशा स्पष्ट नहीं होती है।

4.2 इकाई सदिश :

इकाई परिमाण के एक सदिश को इकाई सदिश कहा जाता है। a की दिशा में एक इकाई सदिश को $\hat{a}$ द्वारा निरूपित

किया जाता है $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\vec{a}}{a}$ = $\frac{\vec{a}}{a}$ का परिमाण



DETECTIVE MIND

➤ $|\hat{a}| = 1$

➤ x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष के समांतर इकाई सदिशों को क्रमशः $\hat{i}$, $\hat{j}$ और $\hat{k}$ द्वारा दर्शाया जाता

➤ दो इकाई सदिश तब तक समान नहीं हो सकते जब तक कि उनकी दिशा समान न हो।

4.3 समान सदिश :

दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ बराबर कहा जाता है, यदि

- (1) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$
- (2) दिशा समान हो।

4.4 संरेख सदिश:

वे सदिश जो एक ही सदिश के समांतर होते हैं, और अंतिम बिन्दु या प्रारम्भिक बिन्दु उभयनिष्ठ होता है संरेख सदिश कहलाते हैं।

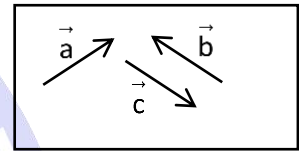
4.5 समांतर सदिश:

सदिश जिनकी रेखा एक समान होती है तथा उनके बीच कोण 0 या 180° होता है।



4.6 समतलीय सदिश :

यदि किसी दिए गए सदिशों का निर्देशित रेखाखंड एक तल में स्थित हो तो वे **समतलीय सदिश** कहलाते हैं यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि समान प्रारंभिक बिंदु वाले दो सदिश हमेशा समतलीय होते हैं लेकिन ऐसे तीन या अधिक सदिश समतलीय नहीं हो सकते हैं।



4.7 स्थिति सदिश :

$\vec{OA}$ सदिश जो एक निश्चित बिंदु (मूल कहा जाता है) O के सापेक्ष में बिंदु A की स्थिति को निरूपित करता है, बिंदु A का स्थिति सदिश कहलाता है। यदि (x, y, z) बिंदु A के निर्देशांक हैं, तो

$$\vec{OA} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

4.8 व्युत्क्रम सदिश :

एक सदिश जिसकी दिशा सदिश a के समान होती है लेकिन जिसका परिमाण a के परिमाण का व्युत्क्रम होता है, सदिश a का व्युत्क्रम सदिश कहलाता है और इसे $(\vec{a})^{-1}$ से निरूपित किया जाता है।

इस प्रकार यदि $a = \alpha \hat{a}$ हो, तब

$$a^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot \hat{a} = \frac{\alpha \hat{a}}{|\vec{a}|^2} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^2}$$

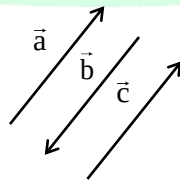


DETECTIVE MIND

➤ एक इकाई सदिश स्वयं का व्युत्क्रम होता है।

4.9 समान और असमान सदिश :

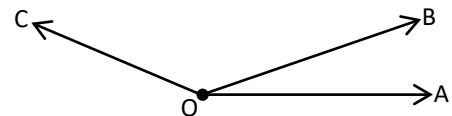
समान दिशा वाले सदिशों को समान सदिश कहते हैं। इसके विपरीत, एक दूसरे के सापेक्ष विपरीत दिशा वाले सदिशों को असमान सदिश कहा जाता है।



दिए गए आरेख में $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$ समान सदिश हैं जबकि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ असमान सदिश हैं।

4.10 सह – प्रारंभिक सदिश :

एक सदिश को सह-प्रारंभिक सदिश कहा जाता है जब दो या दो से अधिक सदिशों का प्रारंभिक बिंदु समान होता है, उदाहरण के लिए, सदिश $\vec{OC}$, $\vec{OB}$ और $\vec{OA}$ को सह-प्रारंभिक सदिश कहा जाता है क्योंकि उनके पास एक ही प्रारंभिक बिंदु A होता है।



4.11 ऋणात्मक सदिश:

एक ऋणात्मक सदिश संदर्भ दिशा (वास्तविक दिशा) के विपरीत दिशा को निरूपित करता है। इसका अर्थ है कि दो सदिशों का परिमाण समान है लेकिन वे दिशा में विपरीत हैं।

उदाहरण के लिए, यदि A और B दो सदिश हैं जिनका परिमाण समान है लेकिन दिशा में विपरीत है, तो सदिश A, सदिश B का ऋणात्मक होता है।

$$A = -B$$

Ex. $\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ का इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

Sol. $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

यदि $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ हो, तो $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

$$\therefore |\vec{a}| = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{k}$$

Ex. x और y के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए सदिश

$$\vec{a} = (x+2)\hat{i} - (x-y)\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b} = (x-1)\hat{i} + (2x+y)\hat{j} + 2\hat{k} \text{ समांतर हैं।}$$

Sol. $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ समांतर हैं यदि $\frac{x+2}{x-1} = \frac{y-x}{2x+y} = \frac{1}{2}$

$$x = -5, y = -20$$

5. सदिश का योग (ADDITION OF VECTORS)**5.1 घटक रूप में योग :**

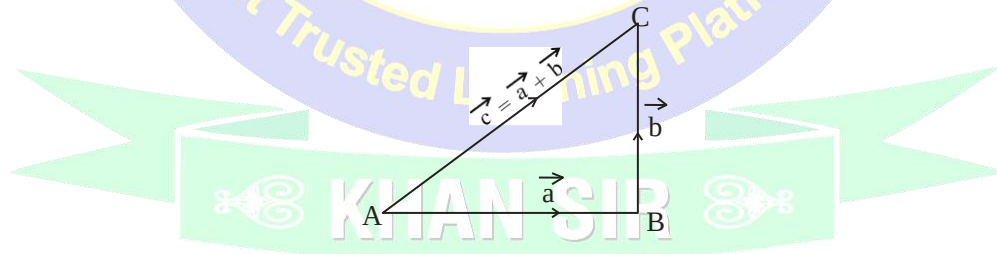
यदि सदिशों $\hat{i}$, $\hat{j}$ को और $\hat{k}$ के रूप में परिभाषित किया गया है। i.e., यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ और

$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ है तो उनका योग इस प्रकार परिभाषित किया गया है

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$

5.2 योग का त्रिभुज नियम :

यदि दो सदिशों को एक त्रिभुज की दो क्रमागत भुजाओं द्वारा निरूपित किया जाता है तो उनका योग त्रिभुज की तीसरी भुजा द्वारा दर्शाया जाता है, परन्तु विपरीत दिशा में। इसे सदिशों के योग का त्रिभुज नियम कहा जाता है।



इस प्रकार, यदि $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ तथा $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ हो

तब $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ अर्थात् $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

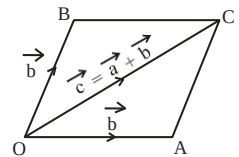
5.3 योग का समांतर चतुर्भुज नियम :

यदि दो सदिशों को एक समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं द्वारा निरूपित किया जाता है, तो उनका योग उस समांतर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा निरूपित किया जाता है, जिसका प्रारंभिक बिंदु दिए गए सदिश के प्रारंभिक बिंदु के समान होता है। इसे सदिशों के योग के समांतर चतुर्भुज नियम के रूप में जाना जाता है।

इस प्रकार यदि $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, तथा $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$

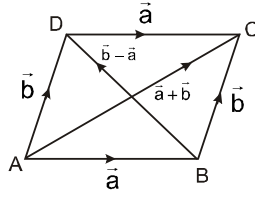
फिर $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ अर्थात् $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

जहाँ पर $\overrightarrow{OC}$ समांतर चतुर्भुज OABC का एक विकर्ण है।



Ex. यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ एक समांतर चतुर्भुज की दो आसन्न भुजाओं को निरूपित करते हैं, समांतर चतुर्भुज के विकर्णों के समांतर इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

Sol. मान लीजिए ABCD एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है कि $\vec{AB} = \vec{a}$ तथा $\vec{BC} = \vec{b}$ हो



तब, $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

$$\Rightarrow \vec{AC} = \vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}$$

$$\vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AD}$$

$$\Rightarrow \vec{BD} = \vec{AD} - \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = -(\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$|\vec{BD}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

$$\therefore \vec{AC} \text{ की दिशा में इकाई सदिश} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} = \frac{1}{\sqrt{50}} (3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k})$$

$$\text{तथा } \vec{BD} \text{ की दिशा में इकाई सदिश} = \frac{\vec{BD}}{|\vec{BD}|} = -\frac{1}{\sqrt{14}} (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$$

6. सदिश योग के गुण (PROPERTIES OF VECTOR ADDITION)

सदिश योग में निम्नलिखित गुण होते हैं।

(i) **द्विआधारी संक्रिया :** दो सदिशों का योग सदैव एक सदिश होता है।

(ii) **क्रम विनिमेय :**

किन्हीं दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(iii) **साहचर्य :**

किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिए, $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

(iv) **तत्समक :**

किसी भी सदिश के लिए शून्य सदिश योग तत्समक होता है

$$\vec{0} + \vec{a} = \vec{a} = \vec{a} + \vec{0}$$

(v) **योज्य प्रतिलोम :**

प्रत्येक सदिश के लिए उसका ऋणात्मक सदिश $-\vec{a}$ का अस्तित्व इस प्रकार होता है कि

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$$

अर्थात् $(-\vec{a})$, सदिश $\vec{a}$ का योज्य प्रतिलोम है.

इसके अलावा यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ हो

$$\text{तब } -\vec{a} = -a_1\hat{i} - a_2\hat{j} - a_3\hat{k}$$

(vi) **निराकरण नियम :**

किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के लिए

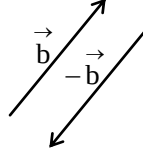
$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + \vec{c} \\ \vec{b} + \vec{a} = \vec{c} + \vec{a} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$$

7. सदिश का व्यवकलन (SUBTRACTION OF VECTORS)

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश हैं, तो उनका व्यवकलन $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ की तरह परिभाषित किया गया है जहाँ पर $-\vec{b}$, $\vec{b}$ का ऋणात्मक है जिसका परिमाण $\vec{b}$ के बराबर है और दिशा $\vec{b}$ के विपरीत है।

यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

तब $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$



DETECTIVE MIND

➤ $\vec{a} - \vec{b} \neq \vec{b} - \vec{a}$

➤ $(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{c} \neq \vec{a} - (\vec{b} - \vec{c})$

चूँकि त्रिभुज की कोई एक भुजा अन्य दो भुजाओं के योग से कम और अंतर से अधिक होती है, इसलिए किन्हीं दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए हमारे पास है।

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$$

8. दो बिंदुओं के बीच की दूरी (DISTANCE BETWEEN TWO POINTS)

मान लीजिए A और B दो दिए गए बिंदु हैं जिनके निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) हैं।

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ बिंदु O, के सापेक्ष A और B के स्थिति सदिश हैं, तो

$$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}, \quad \vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$$

अब $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$

$$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

बिंदुओं के बीच की दूरी = $\vec{AB}$ का परिमाण = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Ex. दूरी सूत्र का उपयोग करके, दर्शाइए कि बिंदु $(4, 5, -5)$, $(0, -11, 3)$ और $(2, -3, -1)$ संरेख हैं।

Sol. माना $A \equiv (4, 5, -5)$, $B \equiv (0, -11, 3)$, $C \equiv (2, -3, -1)$.

$$AB = \sqrt{(4-0)^2 + (5+11)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{336} = \sqrt{4 \times 84} = 2\sqrt{84}$$

$$BC = \sqrt{(0-2)^2 + (-11+3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{84}$$

$$AC = \sqrt{(4-2)^2 + (5+3)^2 + (-5+1)^2} = \sqrt{84}$$

$$BC + AC = AB$$

अतः बिंदु A, B, C संरेख हैं और C, A और B के बीच स्थित है।

Ex. उस बिंदु का बिंदु पथ ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार गति करता है कि बिंदु $A(0, 0, -\alpha)$ और $B(0, 0, \alpha)$ से उसकी दूरी का योगफल स्थिर है।

Sol. माना चर बिंदु $p(x, y, z)$ जिसका बिंदु पथ आवश्यक है दिया गया है $PA + PB = \text{स्थिरांक} = 2a$ (माना)

$$\therefore \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z+\alpha)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-\alpha)^2} = 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + (z+\alpha)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \alpha^2 + 2z\alpha = 4a^2 + x^2 + y^2 + z^2 + \alpha^2 - 2z\alpha - 4a \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow 4z\alpha - 4a^2 = -4a \sqrt{x^2 + y^2 + (z-\alpha)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{z^2 \alpha^2}{a^2} + a^2 - 2z\alpha = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha^2 - 2z\alpha$$

$$\text{या, } x^2 + y^2 + z^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right) = a^2 - \alpha^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2 - \alpha^2} + \frac{y^2}{a^2 - \alpha^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$$

यह आवश्यक बिंदुपथ है।

9. एक अदिश द्वारा एक सदिश का गुणनफल (MULTIPLICATION OF A VECTOR BY A SCALAR)

यदि $\vec{a}$ एक सदिश है और m एक अदिश (अर्थात एक वास्तविक संख्या) है तो $m\vec{a}$ एक सदिश है जिसका परिमाण $\vec{a}$ के परिमाण का m गुना है और जिसकी दिशा $\vec{a}$ की दिशा के समान है, यदि m धनात्मक है तब $m\vec{a}$ की दिशा $\vec{a}$ की दिशा के समान है और $m\vec{a}$ ऋणात्मक हो तब दिशा $\vec{a}$ की दिशा के विपरीत होती है

$$\therefore m\vec{a} \text{ का परिमाण} = |m\vec{a}|$$

$$\Rightarrow m(a \text{ का परिमाण}) = m|\vec{a}|$$

पुनः यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तब

$$m\vec{a} = (ma_1)\hat{i} + (ma_2)\hat{j} + (ma_3)\hat{k}$$



DETECTIVE MIND

- एक सदिश के एक अदिश से गुणन को 'अदिश गुणन' भी कहा जाता है।
- अदिश गुणन की परिभाषा से यह ध्यान देना स्पष्ट है कि

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} = m\vec{b}, \text{ जहाँ } m \text{ कुछ उपयुक्त अदिश है।}$$

गुण

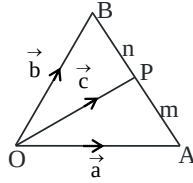
यदि $\vec{a}, \vec{b}$ कोई दो सदिश हैं और m, n कोई अदिश है तो

- (i) $m(\vec{a}) = (\vec{a})m = m\vec{a}$ (क्रम विनिमेय)
 - (ii) $m(n\vec{a}) = n(m\vec{a}) = (mn)\vec{a}$ (साहचर्य)
 - (iii) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
 - (iv) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$
- (वितरण)

10. एक विभाजित बिंदु की स्थिति सदिश या खंड सूत्र (POSITION VECTOR OF A DIVIDING POINT OR SECTION FORMULA)

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो बिंदुओं A और B के स्थिति सदिश हैं, तो बिंदु P का स्थिति सदिश $\vec{c}$, AB को $m:n$ के अनुपात में विभाजित करता है

$$\vec{c} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$



विशेष स्थिति :

(i) AB के मध्य बिंदु का स्थिति सदिश $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ है

(ii) $\angle AOB$ के आंतरिक समद्विभाजक के अनुदिश कोई सदिश $\lambda(\vec{a} + \vec{b})$ द्वारा दिया जाता है



DETECTIVE MIND

- यदि बिंदु P, AB को बाह्य रूप से $m:n$ के अनुपात में विभाजित करता है, तो m/n ऋणात्मक होगा। यदि m धनात्मक है और n ऋणात्मक है, तो P का स्थिति सदिश $\vec{c} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m - n}$ द्वारा दिया जाता है
- यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं, तो उसके केन्द्रक का स्थिति सदिश $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$ होता है।
- यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ एक चतुष्फलक के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं, तो इसके केन्द्रक का स्थिति सदिश $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$ है

Ex. चतुर्भुज की दो विपरीत भुजाओं का मध्यबिंदु और विकर्णों का मध्यबिंदु एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं। सदिशों का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए।

Sol. माना ABCD चतुर्भुज है और $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ क्रमशः शीर्षों A, B, C, D के स्थिति सदिश हों।

मान लीजिए E, F, G, H क्रमशः AB, CD, AC और BD का मध्यबिंदु है

$$E \text{ का स्थिति सदिश } = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$F \text{ का स्थिति सदिश } = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}$$

$$G \text{ का स्थिति सदिश } = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}$$

$$H \text{ का स्थिति सदिश } = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$$

$$\vec{EG} = \left(\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} \right) - \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right) = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$$

$$\vec{HF} = \left(\frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} \right) - \left(\frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} \right) = \frac{\vec{c} - \vec{b}}{2}$$

$$\vec{EG} = \vec{HF} \Rightarrow |\vec{EG}| = |\vec{HF}| \text{ और } \vec{EG} \parallel \vec{HF}$$

इसलिए EGHF एक समांतर चतुर्भुज है।

11. दो समांतर सदिशों के बीच संबंध (RELATION BETWEEN TWO PARALLEL VECTORS)

- (i) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो समांतर सदिश हों, तो एक अदिश k का अस्तित्व इस प्रकार होता है कि $\vec{a} = k\vec{b}$
 अर्थात् दो गैर-शून्य अदिश राशियाँ x और y का अस्तित्व है ताकि $x\vec{a} + y\vec{b} = 0$
 यदि a और b दो गैर-शून्य गैर-समांतर सदिश हों तो $x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \Rightarrow x=0$ और $y=0$ स्पष्ट रूप से

$$x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} = 0, \vec{b} = 0 \\ \text{या} \\ x=0, y=0 \\ \text{या} \\ \vec{a} \parallel \vec{b} \end{cases}$$

- (ii) यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ तब समांतर सदिश के गुणधर्म से $\vec{a} \parallel \vec{b}$ हमारे पास है।

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

12. तीन बिंदुओं की संरेखिता (COLLINEARITY OF THREE POINTS)

- (i) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन बिंदुओं A, B और C के स्थिति सदिश हो और x, y, z तीन अदिश हों ताकि सभी शून्य न हों, तो तीन बिंदुओं के संरेख होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्तें हैं
 $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$ और $x + y + z = 0$
 (ii) तीन बिंदु A, B और C संरेख हैं, यदि कोई दो सदिश $\vec{AB}, \vec{BC}$ तथा $\vec{CA}$ समांतर हैं अर्थात् उनमें से एक शेष सदिशों में से किसी एक का अदिश गुणज है।

13. समतलीय और गैर समतलीय सदिश (COPLANAR & NON-COPLANAR VECTOR)

- (i) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन समतलीय सदिश हों, तो सदिश $\vec{c}$ शेष दो सदिशों के रैखिक संयोजन के रूप में विशिष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है अर्थात्

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$$

जहाँ λ तथा μ उपयुक्त अदिश हैं।

पुनः $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \Rightarrow$ सदिश $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समतलीय हैं।

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन समतलीय सदिश हों, तो तीन अशून्य अदिश x, y, z का अस्तित्व होता है हों ताकि

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$$

- (ii) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन गैर समतलीय अशून्य सदिश हो तो

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0 \Rightarrow x=0, y=0, z=0$$

- (iii) किसी भी सदिश r को तीन गैर समतलीय और शून्येतर सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के रैखिक संयोजन के रूप में विशिष्ट रूप से व्यक्त किया जा सकता है अर्थात् $r = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ जहाँ x, y और z अदिश हैं।

14. सदिश का गुणनफल (PRODUCT OF VECTORS)

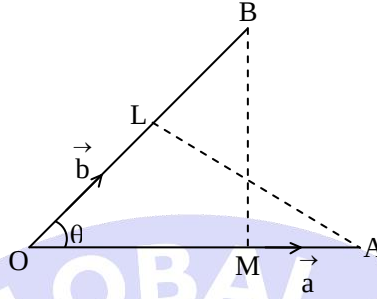
दो सदिशों का गुणनफल दो विधियों द्वारा किया जाता है जब दो सदिशों के गुणनफल से एक अदिश राशि प्राप्त होती है तो इसे **अदिश गुणनफल** कहते हैं। इसे **बिन्दु गुणनफल** भी कहा जाता है क्योंकि इस गुणनफल को बिन्दु लगाकर दर्शाया जाता है।

जब दो सदिशों के गुणनफल का परिणाम सदिश राशि में होता है तो यह **सदिश गुणनफल** कहलाता है। इस गुणनफल को (x) चिह्न द्वारा दर्शाया जाता है इसीलिए इसे **वज्र गुणनफल** भी कहा जाता है।

15. दो सदिशों का अदिश या बिंदु गुणनफल फल (SCALAR OR DOT PRODUCT OF TWO VECTORS)

15.1 परिभाषा :

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो शून्येतर सदिश हैं और θ उनके बीच का कोण हो, तो उनके अदिश गुणनफल (या बिन्दु गुणनफल) को संख्या $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \theta$ के रूप में परिभाषित किया जाता है जहाँ $|\vec{a}|$ और $|\vec{b}|$ क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के मापांक हैं और $0 \leq \theta \leq \pi$ है इसे $\vec{a} \cdot \vec{b}$ द्वारा निरूपित किया जाता है इस प्रकार $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = ab \cos \theta$



DETECTIVE MIND

- $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Rightarrow \vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण न्यून कोण है और $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Rightarrow \vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण अधिक कोण है।
- शून्य और शून्येतर सदिश का बिन्दु गुणनफल एक अदिश शून्य होता है।

15.2 ज्यामितीय व्याख्या :

ज्यामितीय रूप से, दो सदिशों का अदिश गुणनफल एक के परिमाण के गुणनफल और पहले सदिश की दिशा में दूसरे के प्रक्षेपण के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात् $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} (\vec{b} \cos \theta) = |\vec{a}| (|\vec{b}| \cos \theta)$ ($\vec{b}$ का प्रक्षेपण $\vec{a}$ की दिशा में) इसी प्रकार $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} (\vec{a} \cos \theta) = |\vec{b}| (|\vec{a}| \cos \theta)$ ($\vec{a}$ का प्रक्षेपण $\vec{b}$ की दिशा में)

यहाँ $\vec{a}$ पर $\vec{b}$ का प्रक्षेपण $= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$; $\vec{b}$ पर $\vec{a}$ का प्रक्षेपण $= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$

16. विशेष स्थितियों में अदिश गुणनफल (SCALAR PRODUCT IN PARTICULAR CASES)

- (i) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ सदिश हैं, तब $\theta = 0$ हो, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 0 = |\vec{a}| |\vec{b}|$ अर्थात् दो समान सदिशों का अदिश गुणन उनके मापांक के गुणनफल के बराबर होता है।
- (ii) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ असमान सदिश हैं तो $\theta = \pi$ इसलिए $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi = -|\vec{a}| |\vec{b}|$.
- (iii) एक सदिश का अदिश गुणनफल उसके मापांक के वर्ग के बराबर होता है अर्थात् $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- (iv) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ एक दूसरे के लंबवत हैं तो $\theta = \pi/2$, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \pi/2 = 0$ अर्थात् दो लंबवत सदिशों का अदिश गुणनफल हमेशा शून्य होता है।

लेकिन इसका विलोम सदैव सत्य नहीं हो सकता अर्थात् $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \nRightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

लेकिन यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ शून्येतर सदिश हैं, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

इस प्रकार $\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

- (v) उपरोक्त स्थितियों की सहायता से, हमें निम्नलिखित महत्वपूर्ण परिणाम मिलते हैं:

$$(1) \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1 \quad (2) \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$$

- (vi) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इकाई सदिश हैं, तो $\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \theta$

17. अदिश गुणनफल के गुण (PROPERTIES OF SCALAR PRODUCT)

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई सदिश है तथा m , और n तो कोई अदिश है तो

- (i) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (क्रम विनिमेय)
- (ii) $(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (m\vec{b}) = m(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- (iii) $(m\vec{a}) \cdot (n\vec{b}) = (mn)(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- (iv) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (वितरण)
- (v) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \nRightarrow \vec{b} = \vec{c}$

वास्तव में $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \vec{a} = 0$ या $\vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$

(vi) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ अर्थहीन है

(vi) अदिश द्विआधारी सक्रिया नहीं है।



DETECTIVE MIND

- $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b}$ परिभाषित नहीं है
- $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
- $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$
- $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$
- $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$
- $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

18. दो सदिशों के बीच का कोण (ANGLE BETWEEN TWO VECTORS)

(i) यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश हो और θ उनके बीच का कोण हो, तो

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

(ii) यदि $\vec{a} = a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}$ तथा

$\vec{b} = b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}$ हो, तो

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$



DETECTIVE MIND

- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ एक दूसरे के लंबवत हैं तब $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

Ex. यदि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ और $|\vec{c}|=6$ हो, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए

Sol. हमारे पास है, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

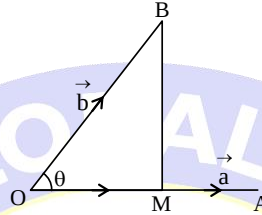
$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c} \quad \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (-\vec{c}) \cdot (-\vec{c})$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 \quad \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{c}|^2$$

$$\Rightarrow 9 + 25 + 2(3)(5)\cos\theta = 36 \quad \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{30} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1} \frac{1}{15}$$

19. a की दिशा में और लम्बवत b के घटक (COMPONENTS OF b ALONG & PERPENDICULAR TO a)



(i) a की दिशा में घटक = $\overrightarrow{OM} = OM \hat{a} = (b \cos \theta) \hat{a} = \frac{(a \cdot b \cos \theta)}{a} \hat{a} = \frac{(a \cdot b)}{a^2} \cdot a$

(ii) $\vec{a}$ के लम्बवत घटक = $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \vec{b} - \frac{(a \cdot b)}{a^2} \cdot \vec{a}$

Ex. यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b} = 2\vec{a} - \hat{j} + 3\hat{k}$ हो, तो ज्ञात कीजिए

(i) $\vec{a}$ की दिशा में $\vec{b}$ का घटक

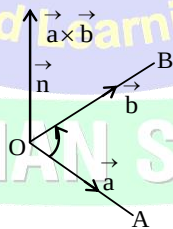
(ii) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतल में $\vec{b}$ का घटक लेकिन $\vec{a}$ पर लम्बवत

Sol. (i) $\vec{a}$ की दिशा में $\vec{b}$ का घटक $\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a}$ है यहाँ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 1 + 3 = 4$ और $|\vec{a}|^2 = 3$

अतः $\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = \frac{4}{3} \vec{a} = \frac{4}{3} (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

(ii) $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के समतल में $\vec{b}$ का घटक लेकिन $\vec{a}$ पर $\perp \vec{b} - \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \right) \vec{a} = \frac{1}{3} (2\hat{i} - 7\hat{j} + 5\hat{k})$ है

20. दो सदिशों का सदिश या ब्रज गुणनफल (VECTOR OR CROSS PRODUCT OF TWO VECTORS)



20.1 परिभाषा :

यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दो सदिश हो और θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) उनके बीच का कोण हो, तो उनके सदिश (या ब्रज) गुणनफल को एक सदिश के रूप में परिभाषित किया जाता है जिसका परिमाण $ab \sin \theta$ है जिसकी दिशा $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के तल के लम्बवत इस प्रकार है कि $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\vec{a} \times \vec{b}$ एक दाहिने हाथ की निकाय बनाता है।

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \hat{n} = \vec{a} \vec{b} \sin \theta \hat{n}$$

जहाँ $\hat{n}$, $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के तल के लम्बवत एक इकाई सदिश इस प्रकार है कि $\vec{a}$, $\vec{b}$ तथा $\hat{n}$ एक दाहिने हाथ की निकाय बनाता है।

20.2 घटकों के संदर्भ में सदिश गुणनफल:

$$\begin{aligned} \text{यदि } \vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \text{ तथा } \vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} \text{ हो, तो } \vec{a} \times \vec{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} \\ &+ (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k} \\ &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

20.3 दो सदिशों के बीच का कोण :

$$\text{यदि } \theta, \vec{a} \text{ तथा } \vec{b} \text{ के बीच का कोण है तब } \sin \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\text{यदि } \hat{n}, \vec{a} \text{ तथा } \vec{b} \text{ के तल के लंबवत इकाई सदिश है तब } \hat{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$$

21. विशेष स्थितियों में सदिश (VECTOR PRODUCT IN PARTICULAR CASES)

- दो समान्तर सदिशों का सदिश गुणनफल सदैव शून्य होता है अर्थात् यदि सदिश a और b समांतर हों, तो $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
विशेष रूप से $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
- यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ लंबवत सदिश हैं, तो $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \hat{n} = \vec{a} \vec{b} \hat{n}$
- यदि $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ तीन परस्पर लंबवत इकाई सदिश हों, तो
 - $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
 - $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
 - $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

22. सदिश गुणनफल के गुण (PROPERTIES OF VECTOR PRODUCT)

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ कोई सदिश है तथा m और n कोई अदिश है तब

- $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ (गैर क्रम विनिमेय)
लेकिन $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ और $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{b} \times \vec{a}|$
- $(m\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m\vec{b}) = m(\vec{a} \times \vec{b})$
- $(m\vec{a}) \times (n\vec{b}) = (mn)(\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ (वितरण)
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{b} = \vec{c}$ वास्तव में

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0 \text{ या } \vec{b} = \vec{c} \text{ या } \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$$

Ex. परिमाण 9 वाला एक सदिश ज्ञात कीजिए, जो दोनों सदिशों $\hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ के लंबवत है।

Sol. माना $\vec{a} = \hat{i} - 7\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ है, तब

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -7 & 7 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-14 + 14)\hat{i} - (2 - 21)\hat{j} + (-2 + 21)\hat{k} = 19\hat{j} + 19\hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 19\sqrt{2} \quad \therefore \text{आवश्यक सदिश} = \pm 9 \left(\frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} \right) = \pm \frac{9}{\sqrt{2}} (\hat{j} + \hat{k})$$

Ex. किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिए दर्शाइए कि $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = 0$

Sol. हमारे पास है, $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b})$
 $= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$ [वितरण नियम के प्रयोग से]
 $= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{c} = \vec{0}$ [$\because \vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$ आदि]

23. सदिश की ज्यामितीय व्याख्या (GEOMETRICAL INTERPRETATION OF VECTOR PRODUCT)

सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ का सदिश गुणनफल एक सदिश को निरूपित करता है जिसका मापांक समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के बराबर होता है जिसकी दो आसन्न भुजाओं को $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ द्वारा दर्शाया जाता है इसलिए $|\vec{a} \times \vec{b}| =$ समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसकी आसन्न भुजाएँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हैं

इसके अलावा यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि यदि $\vec{a}$, $\vec{b}$ एक समांतर चतुर्भुज के दो विकर्णों को निरूपित करते हैं, तो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$



DETECTIVE MIND

➤ एक चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{BD}|$

24. त्रिभुज का क्षेत्रफल (AREA OF A TRIANGLE)

- (i) त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$
- (ii) यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ΔABC के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं तो इसका क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a})|$



DETECTIVE MIND

➤ स्थिति सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के साथ तीन बिंदु संरेख हैं यदि $(\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{c}) + (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$

25. अदिश त्रिक गुणनफल (SCALAR TRIPLE PRODUCT)

25.1 परिभाषा :

यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश हैं, तो उनके अदिश त्रिक गुणनफल को दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b} \times \vec{c}$ के बिन्दु के रूप में परिभाषित किया जाता है यह आम तौर पर $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ या $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$ द्वारा निरूपित किया जाता है इसे $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के बॉक्स गुणनफल के रूप में पढ़ा जाता है इसी प्रकार अन्य अदिश त्रिक गुणनफलों को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है $(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}, (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$



DETECTIVE MIND

➤ अदिश त्रिक गुणनफल हमेशा एक अदिश मात्रा (संख्या) में प्राप्त होता है।

25.2 ज्यामितीय व्याख्या:

तीन सदिशों का अदिश त्रिक गुणनफल उस समांतर चतुर्भुज के आयतन के बराबर होता है जिसके तीन सहसमीपवर्ती किनारों को दिए गए सदिशों द्वारा दर्शाया जाता है।

इसलिए $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] =$ समांतर चतुर्भुज का आयतन जिसके सहसमीपवर्ती किनारे $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ हैं

25.3 अदिश त्रिक गुणनफल के लिए सूत्र:

(i) यदि $\vec{a} = a_1\ell + a_2m + a_3n$, $\vec{b} = b_1\ell + b_2m + b_3n$ और $\vec{c} = c_1\ell + c_2m + c_3n$ हो, तब

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = [\ell mn]$$

(ii) $\vec{a} = \vec{a}_1 \hat{i} + \vec{a}_2 \hat{j} + \vec{a}_3 \hat{k}$, $\vec{b} = \vec{b}_1 \hat{i} + \vec{b}_2 \hat{j} + \vec{b}_3 \hat{k}$ और $\vec{c} = \vec{c}_1 \hat{i} + \vec{c}_2 \hat{j} + \vec{c}_3 \hat{k}$ हो, तब

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(iii) किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ के लिए

$$(1) [\vec{a} + \vec{b} \vec{b} + \vec{c} \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$$

$$(2) [\vec{a} - \vec{b} \vec{b} - \vec{c} \vec{c} - \vec{a}] = 0$$

$$(3) [\vec{a} \times \vec{b} \vec{b} \times \vec{c} \vec{c} \times \vec{a}] = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]^2$$

25.4 अदिश त्रिक गुणनफल के गुण

(i) $(\cdot)$ और $(\times)$ की स्थिति को आपस में बदला जा सकता है अर्थात् $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

लेकिन $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

इसलिए $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}]$

इसलिए यदि हम a, b और c के चक्रीय क्रम को नहीं बदलते हैं तो अदिश त्रिक गुणनफल का मान बिन्दु और ब्रज को आपस में बदलने से नहीं बदलता है।

(ii) यदि सदिशों का चक्रीय क्रम बदल दिया जाता है, तो अदिश त्रिक गुणनफल का चिन्ह बदल जाता है अर्थात्

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}) \text{ या } [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = -[\vec{a} \vec{c} \vec{b}]$$

(i) और (ii) से हमारे पास है

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = [\vec{b} \vec{c} \vec{a}] = [\vec{c} \vec{a} \vec{b}] = -[\vec{a} \vec{c} \vec{b}] = -[\vec{b} \vec{a} \vec{c}] = -[\vec{c} \vec{b} \vec{a}]$$

(iii) तीन सदिशों का अदिश त्रिक गुणनफल, जब उनमें से दो समान या समांतर हों, शून्य होता है अर्थात्

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{b}] = [\vec{a} \vec{b} \vec{a}] = 0$$

(iv) तीन परस्पर लंबवत इकाई सदिशों का अदिश त्रिक गुणनफल ± 1 है अतः

$$[\hat{i} \hat{j} \hat{k}] = 1, [\hat{i} \hat{k} \hat{j}] = -1$$

(v) यदि तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ में से दो समांतर हैं तो $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$

(vi) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन समतलीय सदिश हैं यदि $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$ अर्थात् तीन शून्येतर संरेखीय सदिशों के समतलीय होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त शर्त है

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$$

(vii) किसी भी सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, d$ के लिए

$$[\vec{a} + \vec{b} \vec{c} d] = [\vec{a} \vec{c} d] + [\vec{b} \vec{c} d]$$

26. सदिश त्रिक गुणनफल (VECTOR TRIPLE PRODUCT)

26.1 परिभाषा :

तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ का सदिश त्रिक गुणनफल दो सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b} \times \vec{c}$ के सदिश गुणनफल के रूप में परिभाषित किया गया है इसे $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ द्वारा निरूपित किया जाता है

26.2 गुण :

(i) सदिश त्रिक गुणनफल के लिए विस्तार सूत्र द्वारा दिया गया है

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} = (\vec{b} \cdot \vec{a})\vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b}$$

(ii) यदि $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ और $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$

$$\text{तब } \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix}$$



DETECTIVE MIND

- सदिश त्रिक गुणनफल एक सदिश मात्रा है।
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$
- सदिश $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$, $\vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ समतलीय है
- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ की दिशा $\vec{a}$ के लंबवत है और $\vec{b}$ और $\vec{c}$ के समांतर है

27. लैग्रेंज सर्वसमिका (LAGRANGE IDENTITY)

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d})] \\ &= \vec{a} \cdot [(\vec{b} \cdot \vec{d})\vec{c} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{d}] \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ &= \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{a} \cdot \vec{d} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

इसे लैग्रेंज सर्वसमिका कहा जाता है।

28. सदिशों का व्युत्क्रम निकाय (RECIPROCAL SYSTEM OF VECTORS)

सदिशों के दो निकायों को सदिशों का व्युत्क्रम निकाय कहा जाता है यदि डॉट गुणनफल लेने पर हमें ईकाई प्राप्त होती है। इस प्रकार, यदि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन गैर-समतलीय सदिश हैं, और यदि

$$\vec{a}' = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]}, \vec{b}' = \frac{\vec{c} \times \vec{a}}{[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]} \text{ और } \vec{c}' = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]},$$

फिर सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ के लिए सदिशों का व्युत्क्रम निकाय $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ हैं

गुण

I. यदि $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ तथा $\vec{a}', \vec{b}'$ और $\vec{c}'$ सदिशों का व्युत्क्रम निकाय हैं, तो $\vec{a} \cdot \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})}{[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]} = \frac{[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]}{[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]} = 1.$

इसी प्रकार, $\vec{b} \cdot \vec{b}' = \vec{c} \cdot \vec{c}' = 1$

II. $\vec{a} \cdot \vec{b}' = \vec{a} \cdot \vec{c}' = \vec{b} \cdot \vec{a}' = \vec{b} \cdot \vec{c}' = \vec{c} \cdot \vec{a}' = \vec{c} \cdot \vec{b}' = 0$

III. $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}][\vec{a}' \vec{b}' \vec{c}'] = 1$

IV. सदिशों $\hat{i}, \hat{j}$ और $\hat{k}$ का लाम्बिक त्रिक स्वयं का व्युत्क्रम होता है

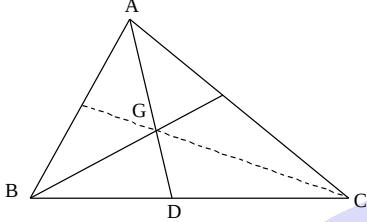
V. $\vec{a}, \vec{b}$ और $\vec{c}$ गैर समतलीय होते हैं यदि $\vec{a}', \vec{b}'$ और $\vec{c}'$ गैर समतलीय हो।

SOLVED EXAMPLES

Ex.1 यदि G त्रिभुज ABC का केन्द्रक है तो $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}$ का मान होगा—

- (1) $\vec{0}$ (2) $3\vec{GA}$ (3) $3\vec{GB}$ (4) $3\vec{GC}$

Sol. यदि D भुजा BC का मध्य बिंदु है तो—



$$\vec{GD} = \frac{1}{2} (\vec{GB} + \vec{GC})$$

$\therefore G, AD$ को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है

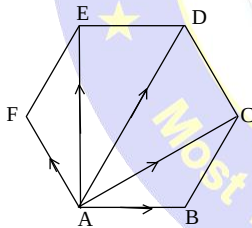
$$\therefore \vec{AG} = 2\vec{GD}$$

$$\Rightarrow -\vec{GA} = \vec{GB} + \vec{GC}$$

$$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

Ex.2 यदि ABCDEF एक नियमित षट्भुज है और $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = k \vec{AD}$ है, तब k बराबर होता है—
(1) 2 (2) 3 (3) 6 (4) 5

Sol. $\therefore \vec{AB} = \vec{ED}$ तथा $\vec{AF} = \vec{CD}$



$$\text{इसलिए } \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF}$$

$$= \vec{ED} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{CD}$$

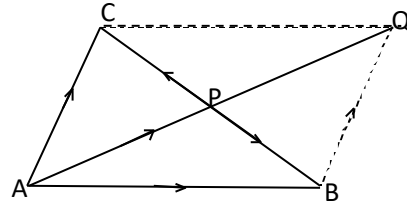
$$= (\vec{AC} + \vec{CD}) + (\vec{AE} + \vec{ED}) + \vec{AD}$$

$$= \vec{AD} + \vec{AD} + \vec{AD} = 3\vec{AD}$$

$$\therefore k = 3$$

Ex.3 यदि त्रिभुज ABC की भुजा BC पर एक बिंदु P इस प्रकार है कि $\vec{AP} + \vec{PB} = \vec{CP} + \vec{PQ}$ हो, तो ABQC होगा—
(1) वर्ग (2) आयत
(3) समांतर चतुर्भुज (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. चित्र से



$$\vec{AP} + \vec{PB} = \vec{AB}$$

$$\vec{CP} + \vec{PQ} = \vec{CQ}$$

इसलिए $\vec{AB} = \vec{CQ}$ हो, तो ABQC एक समांतर चतुर्भुज है।

Ex.4 एक समांतर चतुर्भुज ABCD के विकर्ण AC की लंबाई ज्ञात करें, जिसकी दो आसन्न भुजाएँ AB और AD क्रमशः $2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है—
(1) 3 (2) 4 (3) 5 (4) 7

Sol. $\therefore \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

$$= 3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\therefore \text{विकर्ण की लंबाई } AC = |\vec{AC}|$$

$$= \sqrt{3^2 + 6^2 + (-2)^2} = 7$$

Ex.5 बिंदु A का स्थिति सदिश $6\vec{a} - 2\vec{a}$ है और बिंदु P किसी भी रेखा AB को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है। यदि P का स्थिति सदिश $\vec{a} - \vec{b}$ है, तो B का स्थिति सदिश होगा—

(1) $7\vec{a} + 15\vec{b}$ (2) $7\vec{a} - 15\vec{b}$

(3) $15\vec{a} - 7\vec{b}$ (4) $15\vec{a} + 7\vec{b}$

Sol. माना B का स्थिति सदिश है

$$\therefore \vec{a} - \vec{b} = \frac{\vec{r} + 2(6\vec{a} - 2\vec{a})}{1+2}$$

$$\Rightarrow 3\vec{a} - 3\vec{b} = \vec{r} + 12\vec{b} - 4\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 7\vec{a} - 15\vec{b}$$

Ex.6 यदि $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{BO} + \vec{OC}$ हो, तो A, B, C हैं—
(1) समतलीय (2) संरेखीय
(3) असंरेखीय (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{BO} + \vec{OC} \Rightarrow \vec{AB} = \vec{BC}$

$\therefore \vec{AB} \parallel \vec{BC}$ और एक बिंदु B दोनों सदिशों $\vec{AB}$ तथा $\vec{BC}$ के लिए उभयनिष्ठ है अतः A, B, C संरेख हैं।

Ex.7 माना $A = (x + 4y)\vec{a} + (2x + y + 1)\vec{b}$ और $B = (y - 2x + 2)\vec{a} + (2x - 3y - 1)\vec{b}$ जहाँ $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ असंरेख सदिश हैं, यदि $3A = 2B$ हो, तो

(1) $x = 1, y = 2$

(2) $x = 2, y = 1$

(3) $x = 2, y = -1$ (4) $x = -1, y = 2$

Sol. $3A = 3(x + 4y)\vec{a} + 3(2x + y + 1)\vec{b}$
 $2B = 2(y - 2x + 2)\vec{a} + 2(2x - 3y - 1)\vec{b}$
 $\therefore 3A = 2B \Rightarrow 3(x + 4y) = 2(y - 2x + 2)$
 $3(2x + y + 1) = 2(2x - 3y - 1)$
 $\Rightarrow 7x + 10y = 4$ तथा $2x + 9y = -5$
 $\Rightarrow x = 2, y = -1$

Ex.8 माना बिंदु A, B, C और D के स्थिति सदिश क्रमशः $3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$, $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $-\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $4\hat{i} + 5\hat{j} + \lambda\hat{k}$ है। यदि बिंदु समतलीय हैं, तो λ का मान है।

(1) $-\frac{146}{17}$ (2) $\frac{146}{17}$
 (3) 0 (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\vec{AB} = -\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$
 $\vec{AC} = -4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$
 और $\vec{AD} = \hat{i} + 7\hat{j} + (\lambda + 1)\hat{k}$
 यदि A, B, C, D समतलीय हैं, तो सदिश $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ तथा $\vec{AD}$ समतलीय हैं, तो
 $-\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k} = x(-4\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}) + y[\hat{i} + 7\hat{j} + (\lambda + 1)\hat{k}]$
 $\Rightarrow -4x + y = -1, 3x + 7y = 5$ और $3x + (\lambda + 1)y = -3$ पहले दो समीकरण हल करने पर
 $x = \frac{12}{31}, y = \frac{17}{31}$
 x और y के इन मानों को तीसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर, हम प्राप्त करते हैं
 $= -\frac{146}{17}$

Ex.9 यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$, है तब सदिश $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ हैं—
 (1) रैखिक रूप से स्वतंत्र
 (2) संरेख
 (3) रैखिक रूप से निर्भर
 (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. मान लीजिए $x(\vec{a}) + y(\vec{b}) + z(\vec{c}) = \vec{0}$
 $\Rightarrow x(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) + y(\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) + z(2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}) = \vec{0}$
 $\Rightarrow x + y + 2z = 0$
 $2x - 3y - z = 0$
 $-3x + 2y + 5z = 0$
 इन समीकरणों को हल करने पर हमें प्राप्त होता है कि $x = 0 = y = z$
 $\Rightarrow$ सदिश रैखिक रूप से स्वतंत्र हैं।

Ex.10 यदि $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ एक त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं, तो यह है—
 (1) समबाहु (2) समद्विबाहु

Sol. (3) समकोण समद्विबाहु (4) इनमें से कोई नहीं
 यदि दिए गए बिंदु क्रमशः A, B, C हैं, तो
 $|\vec{AB}| = |-\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k}| = \sqrt{1 + 4 + 36} = \sqrt{41}$
 $|\vec{BC}| = |2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$
 $|\vec{CA}| = |-\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}| = \sqrt{1 + 9 + 25} = \sqrt{35}$

अब $|\vec{AB}|^2 = |\vec{BC}|^2 + |\vec{CA}|^2$
 इसलिए दिए गए बिंदु एक समकोण त्रिभुज बनाते हैं।
Ex.11 यदि किसी त्रिभुज के दो शीर्ष क्रमशः $\hat{i} - \hat{j}$ तथा $\hat{j} + \hat{k}$ हो, तो तीसरा शीर्ष हो सकता है—

(1) $\hat{i} + \hat{k}$ (2) $\hat{i} - \hat{k}$ (3) $2\hat{i} - \hat{j}$ (4) तीनों
Sol. दिए गए विकल्पों में कोई भी सदिश $\hat{i} - \hat{j}$ तथा $\hat{j} + \hat{k}$ के साथ संरेख नहीं है

Ex.12 यदि $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हो, तो $|\vec{a} + \vec{b}|$ बराबर है—
 (1) $4\sqrt{6}$ (2) $3\sqrt{6}$ (3) $2\sqrt{6}$ (4) $\sqrt{6}$

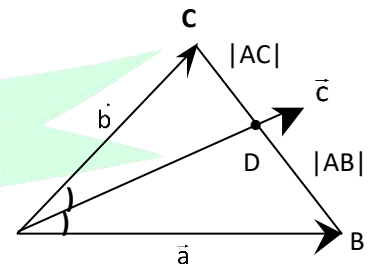
Sol. $\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$
 $\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{9 + 9 + 36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

Ex.13 सदिश $\vec{c}$, सदिश $7\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ के बीच के कोण के आंतरिक द्विभाजक $|\vec{c}| = 5\sqrt{6}$ के साथ निर्देशित है—

(1) $\frac{5}{3}(\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k})$ (2) $\frac{5}{3}(5\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k})$
 (3) $\frac{5}{3}(\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. माना $\vec{a} = 7\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$ तथा $\vec{b} = -2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$
 आंतरिक समद्विभाजक BC को अनुपात में विभाजित करता है

$|\vec{AB}| : |\vec{AC}|, |\vec{AB}| = 9, |\vec{AC}| = 3$
 $\vec{AD} = \left(\frac{9(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) + 3(7\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k})}{9 + 3} \right)$
 $\vec{AD} = \frac{\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k}}{4}$



$$\vec{C} = \left(\frac{\vec{AD}}{|\vec{AD}|} \right) \pm 5\sqrt{6} = \pm \frac{5}{3} (\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k})$$

Ex.14 सदिश $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का सदिश $\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ पर प्रक्षेपण है—

(1) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (2) $\frac{3}{\sqrt{14}}$ (3) $\frac{6}{\sqrt{14}}$ (4) $\frac{2}{3}$

Sol. $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ और इसलिए $\vec{a}$ का प्रक्षेपण $\vec{b}$ पर है

$$= \frac{(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) \cdot (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{1+2+3}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$$

Ex.15 यदि तीन सदिश $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ के लिए $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ हो, तो निम्न में से कौन सा सही है—

- (1) $\vec{b} = \vec{c}$
 (2) $\vec{a} = \vec{0}$
 (3) $\vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$
 (4) $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$

Sol. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ या } \vec{b} - \vec{c} = \vec{0} \text{ या } \vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \text{ या } \vec{b} = \vec{c} \text{ या } \vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$$

Ex.16 यदि θ सदिश $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण है। तब $\cos \theta$ बराबर—

- (1) $5/7$ (2) $6/7$ (3) $4/7$ (4) $1/2$

Sol. $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3+4+3}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = 5/7$

Ex.17 यदि $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ हो, तो a और b के बीच का कोण है

- (1) 60° (2) 30° (3) 90° (4) 180°

Sol. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Ex. 18 बलों $3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ तथा $2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ एक कण पर कार्य कर रहे हैं जो $2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$ बिंदु से $4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ तक विस्थापित होता है बलों द्वारा किया गया कार्य है—

- (1) 30 इकाइयाँ (2) 36 इकाइयाँ
 (3) 24 इकाइयाँ (4) 18 इकाइयाँ

Sol. पारिणामिक बल

$$\vec{F} = (3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) + (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) = 5\hat{i} + 3\hat{j} + 8\hat{k}$$

विस्थापन सदिश

$$\vec{d} = (4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k})$$

$$= 2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

$$\therefore \text{बल द्वारा किया गया कार्य} = \vec{F} \cdot \vec{d} = 10 - 6 + 32 = 36 \text{ इकाइयाँ}$$

Ex.19 किन्हीं दो सदिशों $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के लिए $\vec{b} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|^2$ बराबर है—

- (1) $|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$ (2) $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$
 (3) $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta)^2$
 $= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta)$
 $= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta)^2$
 $= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Ex.20 यदि $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, हो, तो—

- (1) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$
 (2) $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$
 (3) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$
 (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\therefore \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$

$$\therefore \vec{b} \times \vec{c} = -\vec{b} \times (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= -\vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b}$$

$$= \vec{a} \times \vec{b}$$

उसी प्रकार $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$

$$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

Ex.21 यदि $\ell\hat{i} + m\hat{j} + n\hat{k}$ एक इकाई सदिश है जो सदिशों $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$ के लंबवत है तब $|\ell|$ बराबर है—

- (1) $-\frac{3}{\sqrt{155}}$ (2) $\sqrt{\frac{3}{155}}$
 (3) $\frac{3}{\sqrt{155}}$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. सदिश $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ तथा $3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k}$

$$= \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})}{|(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times (3\hat{i} + 4\hat{j} - \hat{k})|}$$

$$= \frac{\hat{i}(1-4) - \hat{j}(-2-3) + \hat{k}(8+3)}{\sqrt{9+25+121}}$$

$$= \frac{-3\hat{i} + 5\hat{j} + 11\hat{k}}{\sqrt{155}}$$

$$\therefore |\ell| = \left| \frac{-3}{\sqrt{155}} \right| = \frac{3}{\sqrt{155}}$$

Ex.22 बिंदु $P(\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k})$, $Q(2\hat{i} - \hat{k})$ और $R(2\hat{j} + \hat{k})$ से गुजरने वाले समतल के लंबवत इकाई सदिश है—

(1) $2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ (2) $\sqrt{6} (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

(3) $\frac{1}{\sqrt{6}} (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ (4) $\frac{1}{6} (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

Sol. $\overrightarrow{PQ} = (2\hat{i} - \hat{k}) - (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = \hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$
 $\overrightarrow{PR} = (2\hat{i} + \hat{k}) - (\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$

अब $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$
 $= 8\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \sqrt{64 + 16 + 16} = 4\sqrt{6}$

$\therefore$ आवश्यक इकाई सदिश $= \frac{4(2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})}{4\sqrt{6}}$

$= \frac{1}{\sqrt{6}} (2\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

Ex.23 यदि $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ तथा $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ हो, तो सही कथन है—

(1) $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ (2) $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$

(3) $\vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} = \vec{c}$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ या $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c}) \dots (1)$

इसी प्रकार $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ या $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} = \vec{c}$ या $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c}) \dots (2)$

(1) और (2) को देखने पर, हम प्राप्त करते हैं कि $\vec{a} = \vec{0}$ या $\vec{b} = \vec{c}$

Ex.24 किसी शून्येतर सदिश $\vec{b}$ के अनुदिश तथा लम्बवत किसी सदिश $\vec{a}$ के घटक हैं—

(1) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$ (2) $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$, $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$

(3) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$ (4) $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}|}$

Sol. माना θ , $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ के बीच का कोण हो, तब $\vec{b}$ की दिशा में $\vec{a}$ का घटक

$= |\vec{a}| \cos \theta = \frac{|\vec{a}| \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$ और $\vec{a}$ का $\vec{b}$ के लम्बवत

घटक

$= |\vec{a}| \sin \theta = \frac{|\vec{a}| |\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

Ex.25 समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल जिसके विकर्ण क्रमशः $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ है—

(1) $5\sqrt{2}$ (2) $5\sqrt{3}$ (3) $2\sqrt{5}$ (4) $3\sqrt{5}$

Sol. समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$

जहाँ $\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

अब $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$
 $= -2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}$

समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} |-2\hat{i} - 14\hat{j} - 10\hat{k}| = \sqrt{1 + 49 + 25} = 5\sqrt{3}$

Ex.26 यदि $\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$, $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ तथा $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ एक त्रिभुज के शीर्षों के स्थिति सदिश हैं, तो इसका क्षेत्रफल है—

(1) 26 (2) 13 (3) $2\sqrt{13}$ (4) $\sqrt{13}$

Sol. यदि A, B, C को शीर्ष दिए गए हैं, तो

$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$, $\overrightarrow{AC} = 2\hat{i}$

$\therefore \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \times 2\hat{i} = -4\hat{k} - 6\hat{j}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 36} = 2\sqrt{13}$

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{13}$

Ex.27 यदि A, B, C, D कोई चार बिंदु हैं, तो $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{BD}|$ बराबर है—

(1) ΔABC का क्षेत्रफल (2) $2(\Delta ABC$ का क्षेत्रफल)

(3) $3(\Delta ABC$ का क्षेत्रफल) (4) $4(\Delta ABC$ का क्षेत्रफल)

Sol. माना $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ तथा $\vec{d}$ बिंदु A, B, C और D के क्रमशः स्थिति सदिश हैं। तब

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{d} - \vec{c})$
 $= \vec{b} \times \vec{d} - \vec{b} \times \vec{c} - \vec{a} \times \vec{d} + \vec{a} \times \vec{c}$

उसी प्रकार

$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AD} = \vec{c} \times \vec{d} - \vec{c} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{a}$

$\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{BD} = \vec{a} \times \vec{d} - \vec{a} \times \vec{b} - \vec{c} \times \vec{d} + \vec{c} \times \vec{b}$

इसलिए दी गई व्यंजक

$= |2(\vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{c})|$

$= 2 |(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a})|$

$= 4(\Delta ABC$ का क्षेत्रफल)

Ex.28 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ तथा $\vec{d}$ क्रमशः चार समतलीय बिंदुओं A, B, C और D के स्थिति सदिश हैं। यदि $(\vec{a} - \vec{d}) \cdot (\vec{b} - \vec{c})$

$= 0 = (\vec{b} - \vec{d}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$ हो, तो ΔABC के लिए D है—

(1) अन्तः केन्द्र

(2) लम्बकेन्द्र

(3) परिकेन्द्र (4) केन्द्रक

Sol. $(\vec{a}-\vec{d}) \cdot (\vec{b}-\vec{c}) = 0$

$$\Rightarrow (\vec{a}-\vec{d}) \perp (\vec{b}-\vec{c}) \Rightarrow \overline{AD} \perp \overline{BC}$$

उसी प्रकार $(\vec{b}-\vec{d}) \cdot (\vec{c}-\vec{a}) = 0$

$$\Rightarrow \overline{BD} \perp \overline{AC}$$

$\therefore D$, $\triangle ABC$ का लम्बकेन्द्र है।

Ex.29 बल $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ तथा $-\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ बिंदु P (0, 1, 2) पर कार्य कर रहे हैं। बिंदु A (1, -2, 0) के सापेक्ष इन बलों का आघूर्ण है—

- (1) $2\hat{i}-6\hat{j}+10\hat{k}$ (2) $-2\hat{i}+6\hat{j}-10\hat{k}$
(3) $2\hat{i}+6\hat{j}-10\hat{k}$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. यदि $\vec{F}$ परिणामी बल हो, तो

$$\vec{F} = 2\hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\text{साथ ही } \vec{r} = \overline{AP} = -\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$$

$$\therefore \text{आवश्यक आघूर्ण} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -2\hat{i}+6\hat{j}-10\hat{k}$$

Ex.30 $\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) \times (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ बराबर है -

- (1) 0 (2) $2[abc]$
(3) $[abc]$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. $\vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) \times (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$\begin{aligned} &= \vec{a} \cdot [(\vec{b}+\vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{b}+\vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b}+\vec{c}) \times \vec{c}] \\ &= \vec{a} \cdot [(\vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} + \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{c})] \\ &= \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}] \\ &= [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] + [\vec{a} \vec{c} \vec{a}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ex.31 यदि सदिश $\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ तथा $\vec{c}=3\hat{i}+p\hat{j}+5\hat{k}$ समतलीय हैं, तो p का मान है—

- (1) 2 (2) 6 (3) -2 (4) -6

Sol. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ समतलीय हैं $\Rightarrow [\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & p & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (10+p+3) - (6-5-p) = 0$$

$$\Rightarrow p = -6$$

Ex.32 यदि $\vec{a}=-3\hat{i}+8\hat{j}+5\hat{k}$, $\vec{b}=-3\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k}$ तथा $\vec{c}=7\hat{i}-5\hat{j}-3\hat{k}$ समांतर चतुष्फलक के सहसमीमावर्ती किनारे हैं तो इसका आयतन है—

- (1) 108 (2) 210 (3) 272 (4) 302

Sol. आवश्यक आयतन = $[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 8 & 5 \\ -3 & 8 & -3 \\ 7 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= |-3(-21-15) - 8(9+21) + 5(15-49)| \\ &= |108 - 240 - 170| \\ &= 302 \end{aligned}$$

Ex.33 किसी भी सदिश $\vec{a}$ के लिए, $\vec{u} = \hat{i} \times (\vec{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\vec{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\vec{a} \times \hat{k})$ बराबर -

- (1) $2\vec{a}$ (2) $-2\vec{a}$ (3) $\vec{a}$ (4) $-\vec{a}$

Sol. $\vec{u} = (\hat{i} \cdot \hat{i})\vec{a} - (\hat{i} \cdot \vec{a})\hat{i} + (\hat{j} \cdot \hat{j})\vec{a} - (\hat{j} \cdot \vec{a})\hat{j} + (\hat{k} \cdot \hat{k})\vec{a} - (\hat{k} \cdot \vec{a})\hat{k}$
 $= \vec{a} - a_1\hat{i} + \vec{a} - a_2\hat{j} + \vec{a} - a_3\hat{k}$
 $[\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} \text{ (माना)}]$
 $\therefore \vec{u} = 3\vec{a} - \vec{a} = 2\vec{a}$

Ex.35 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ इस प्रकार है कि $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 1$ और $|\vec{c}| = 2$ और यदि $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{b} = \vec{0}$ हो, तो $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$ के बीच न्यून कोण है -

- (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{4}$
(3) $\frac{\pi}{6}$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{c}$ के बीच का कोण θ है तब

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos \theta = 1 \cdot 2 \cos \theta = 2 \cos \theta$$

$$\text{लेकिन } \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{c}) + \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{a})\vec{c} + \vec{b} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (2 \cos \theta)\vec{a} - 1 \cdot \vec{c} = -\vec{b}$$

$$\Rightarrow [(2 \cos \theta)\vec{a} - \vec{c}]^2 = [-\vec{b}]^2$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \theta |\vec{a}|^2 - 2 \cdot (2 \cos \theta) \vec{a} \cdot \vec{c} + |\vec{c}|^2 = |\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta (2 \cos \theta) + 4 = 1$$

$$\Rightarrow 4(1 - \cos^2 \theta) = 1 \because |\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 1/2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

Ex.35 $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ और $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}=2\hat{k}$ तीन सदिश हैं। b और c के तल में एक सदिश, जिसका a पर प्रक्षेपण $\sqrt{2/3}$ है -

- (1) $2\hat{i}+3\hat{j}-3\hat{k}$ (2) $2\hat{i}+3\hat{j}+3\hat{k}$
(3) $-2\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$ (4) $2\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$

Sol. माना आवश्यक सदिश $\vec{r} = \vec{b} + t\vec{c}$

$$\Rightarrow \vec{r} = (1+t)\hat{i} + (2+t)\hat{j} - (1+2t)\hat{k}$$

इसके अलावा $\vec{r}$ का $\vec{a}$ पर प्रक्षेपण = $\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\Rightarrow \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{2(1+t) - (2+t) - (1+2t)}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow -t-1=2 \quad \Rightarrow t=-3$$

$$\therefore \vec{r} = -2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$$

Ex.36 यदि $\begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$ और $\vec{A} = (1, a, a^2)$, $\vec{B} = (1, b, b^2)$ और $\vec{C} = (1, c, c^2)$ गैर समतलीय सदिश हैं, तो (abc) बराबर है -

- (1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) 2

Sol. $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ गैर समतलीय सदिश हैं

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\text{अब } \begin{vmatrix} a & a^2 & 1+a^3 \\ b & b^2 & 1+b^3 \\ c & c^2 & 1+c^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (abc+1) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow abc+1=0 \quad [\because \Delta \neq 0]$$

$$\therefore abc = -1$$

Ex.37 xy- समतल में एक इकाई सदिश जो सदिश, $\hat{i} + \hat{j}$ के साथ 45° कोण बनाता है और सदिश $3\hat{i} - 4\hat{j}$ के साथ का 60° कोण बनाता होगा -

- (1) $\hat{i}$ (2) $\frac{(\hat{i} + \hat{j})}{\sqrt{2}}$
(3) $\frac{(\hat{i} - \hat{j})}{\sqrt{2}}$ (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. मान लीजिए कि अभीष्ट सदिश $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ है

$$\therefore x^2 + y^2 = 1 \quad \dots(1)$$

यदि दिए गए सदिश क्रमशः $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ हों, तो जैसा दिया गया है

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{|\vec{r}| |\vec{a}|} \Rightarrow x = y = 1 \quad \dots(2)$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\vec{r} \cdot \vec{b}}{|\vec{r}| |\vec{b}|} \Rightarrow 6x - 8y = 5 \quad \dots(3)$$

लेकिन (1), (2) और (3) एक साथ नहीं रहते। इसलिए ऐसा सदिश संभव नहीं है।

Ex.38 यदि सदिश $a\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}$ तथा $\hat{i} + \hat{j} + c\hat{k}$ ($a \neq b \neq c \neq 1$) समतलीय हैं, तो $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c}$ बराबर है -

- (1) 1 (2) 0
(3) -1 (4) इनमें से कोई नहीं

Sol. चूँकि सदिश समतलीय होते हैं,

$$\therefore \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & b-1 & 0 \\ 0 & 1-b & c-1 \end{vmatrix} = 0$$

[$R_2 - R_1$, $R_3 - R_2$ का प्रयोग करने पर]

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a(b-1)(c-1) - (1-a)\{(c-1) - (1-b)\} = 0 \\ &\Rightarrow a(1-b)(1-c) + (1-a)(1-c) + (1-a)(1-b) = 0 \\ &\Rightarrow (a-1+1)(1-b)(1-c) + (1-a)(1-c) + (1-a)(1-b) = 0 \\ &\Rightarrow (1-b)(1-c) + (1-a)(1-c) + (1-a)(1-b) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1-a} + \frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-c} = 1 \end{aligned}$$

Ex.39 माना $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j}$ है। यदि सदिश $\vec{c}$ इस प्रकार कि $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|$, $|\vec{c} - \vec{a}| = 2\sqrt{2}$ और $(\vec{a} \times \vec{b})$ तथा $\vec{c}$ के बीच का कोण 30° हो, तो $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|$ बराबर है -

- (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) 2 (4) 3

Sol. $|\vec{c} - \vec{a}|^2 = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = (2\sqrt{2})^2$
 $\Rightarrow |\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} = 8$
 $\Rightarrow |\vec{c}|^2 + (4+1+4) - 2\vec{c} \cdot \vec{a} = 8$
 $\Rightarrow |\vec{c}|^2 + 9 - 2|\vec{c}| = 8 \quad [\because \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{c}|]$
 $\Rightarrow |\vec{c}|^2 - 2|\vec{c}| + 1 = 0$

$$|\vec{c} - 1|^2 = 0 \Rightarrow \vec{c} = 1$$

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| |\vec{c}| \sin 30^\circ$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\text{लेकिन } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\therefore |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| = \frac{3}{2}$$

