Chapter 03

त्रिकोणमितीय अनुपात (Trigonometric Ratios)

CONTENT

1. परिचय
2. आधारभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ
3. महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय अनुपात
4. संबद्ध कोणों के त्रिकोणमितीय फलन
5. त्रिकोणमितीय फलन
1. दो कोणों के योग या अंतर के त्रिकोणमितीय फलन
6. रूपान्तरण सूत्र
7. अपवर्त्य कोण और अपवर्तक कोण
8. तीन कोण
9. प्रतिबंध सर्वसमिकाएँ
10. SINE और COSINE श्रेणी
11. COSINE कोणों की गुणनफल श्रेणी
12. त्रिकोणमितिय फलनों के अधिकतम और न्यूनतम मान

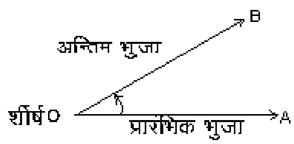
त्रिकोणमितीय अनुपात को त्रिकोणमिति चरण–I के रूप में भी जाना जाता है।

1. परिचय (INTRODUCTION)

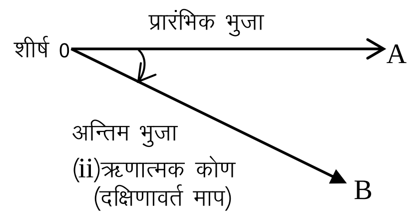
'त्रिकोणमिति' शब्द की व्युत्पत्ति ग्रीक शब्दो 'ट्रिगोन' और 'मेट्रोन' से हुई है तथा इसका अर्थ 'त्रिभुज की भुजाओं और कोणों को मापना' होता है।

कोण:

एक कोण वह माप है जो एक किरण के उसके प्रारंभिक बिंदु के परितः घूर्णन पर बनता है। मूल किरण को प्रारंभिक भुजा कहा जाता है और घूर्णन के बाद किरण की अंतिम स्थिति को कोण की अंतिम भुजा कहा जाता है। घूर्णन बिंदु को शीर्ष कहते हैं। यदि घूर्णन की दिशा वामावर्त है, तो कोण को धनात्मक कहा जाता है और यदि घूर्णन की दिशा दक्षिणावर्त है, तो कोण ऋणात्मक होता है।



(i) धनात्मक कोण (वामावर्त माप)



(ii)ऋणात्मक कोण (दक्षिणावर्त माप)

कोणों के मापन के लिए प्रणालियाँ:

निम्नलिखित प्रणालियों में कोण को मापा जा सकता है।

(1) षाष्टिक पद्धति (ब्रिटिश पद्धति):

इस प्रणाली में एक पूर्ण वृत्ताकार धुमाव के $\frac{1}{360}$ भाग को डिग्री (°) कहा जाता है, एक डिग्री के $\frac{1}{60}$ भाग को एक मिनट (′) कहा जाता है तथा मिनट के $\frac{1}{60}$ भाग को सेकंड (″) कहा जाता है

समकोण = 90°, 1° = 60′, 1′ = 60″

(2) शतिक पद्धति (फ्रेंच पद्धति):

इस प्रणाली में एक पूर्ण वृत्ताकार धुमावो के $\frac{1}{400}$ भाग को ग्रेड (g) कहा जाता है, एक ग्रेड के $\frac{1}{100}$ भाग को एक मिनट (‘) कहा जाता है और एक मिनट के $\frac{1}{100}$ भाग को सेकंड (“) कहा जाता है।

$\therefore$ समकोण = 100^g; 1^g = 100‘; 1‘ = 100“

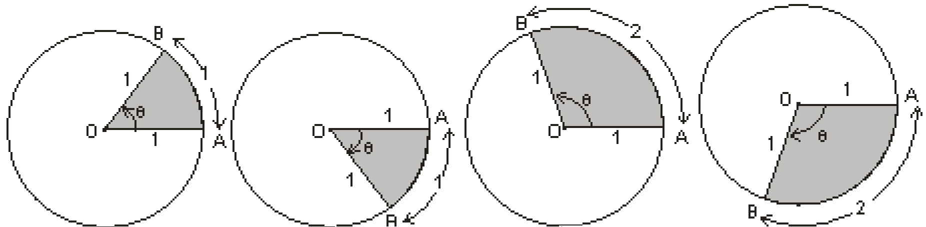
DETECTIVE MIND

षाष्टिक पद्धति में मिनट और सेकंड, शतिक पद्धति में क्रमशः मिनट और सेकंड से भिन्न होते हैं। दोनों पद्धतियों में प्रतीक भी भिन्न होते हैं।

(3) रेडियन या वृत्तीय पद्वति

एक वृत्त के चाप द्वारा अंतरित कोण जिसकी लंबाई वृत्त के केंद्र पर वृत्त की त्रिज्या के बराबर होती है, रेडियन कहलाता है। इस प्रणाली में मापन की इकाई रेडियन $\left({}^{c}\right)$ है।

चूँकि इकाई त्रिज्या वाले एक वृत्त की परिधि 2π है, इसलिए प्रारंभिक भुजा का एक पूर्ण परिक्रमण 2π. रेडियन का कोण बनाता है इसलिए, त्रिज्या r के एक वृत्त में, लंबाई r का एक चाप 1 रेडियन का कोण अंतरित करेगा। हम जानते है कि वृत्त के समान चाप, केंद्र पर समान कोण अंतरित करते हैं। यदि त्रिज्या r वाले एक वृत्त में, लंबाई ℓ का एक चाप एक कोण अंतरित करता है जिसका माप 1 रेडियन होता है, लंबाई ℓ का एक चाप एक कोण अंतरित करेगा जिसका माप $\frac{\ell}{r}$ रेडियन है इस प्रकार, यदि त्रिज्या r के एक वृत्त में, लंबाई ℓ का चाप केन्द्र पर एक कोण θ रेडियन बनाता है तब $\theta = \frac{\ell}{r}$ या $\ell = r\theta$ है।



θ = 1रेडियन (i) | θ = –1रेडियन (ii) | θ = 2रेडियन (iii) | θ = –2रेडियन (iv)

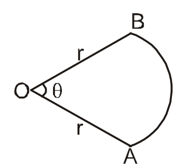
DETECTIVE MIND

यदि कोण का माप दिखाते समय किसी प्रतीक का उल्लेख नहीं किया गया हो, तो इसे रेडियन में मापा जाता है।

जैसे $\theta = 15$ का अर्थ 15 रेडियन होगा।

वृत्तखण्ड का क्षेत्रफल :

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} r^2\theta$ वर्ग इकाईयाँ



रेडियन, डिग्री और ग्रेड के बीच संबंध :

$\frac{\pi}{2}$ रेडियन $= 90° = 100^g$

न्यून कोणों के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात :

मान लीजिए कि एक परिक्रामी किरण OP, OA से प्रारंभ होती है और OP की स्थिति में घूमती है, इस प्रकार कोण AOP बनाती है।

परिक्रामी किरण में कोई बिंदु P लीजिए और प्रारंभिक किरण OA पर लंब PM खीचीएँ।

समकोण त्रिभुज MOP में, OP कर्ण है, PM लंब है, और OM आधार है।

कोण AOP के त्रिकोणमितीय अनुपात या फलन निम्नानुसार परिभाषित किए गए हैं:

$\frac{MP}{OP}$, अर्थात, $\frac{\text{लम्ब}}{\text{कर्ण}}$, कोण AOP का Sine कहलाता है।

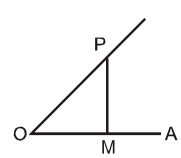
$\frac{OM}{OP}$, अर्थात, $\frac{\text{आधार}}{\text{कर्ण}}$, कोण AOP का Cosine कहलाता है।

$\frac{MP}{OM}$, अर्थात, $\frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$, कोण AOP का Tangent कहलाता है।

$\frac{OM}{MP}$, अर्थात, $\frac{\text{आधार}}{\text{लम्ब}}$, कोण AOP का Cotangent कहलाता है।

$\frac{OP}{OM}$, अर्थात, $\frac{\text{कर्ण}}{\text{आधार}}$, कोण AOP का Secant कहलाता है।

$\frac{OP}{MP}$, अर्थात, $\frac{\text{कर्ण}}{\text{लम्ब}}$, कोण AOP का Cosecant कहलाता है।



2. आधारभूत त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ (BASIC TRIGONOMETRIC IDENTITIES) :

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $-1 \le \sin\theta \le 1$; $-1 \le \cos\theta \le 1$ $\forall$ $\theta \in R$

(2) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$; $|\sec\theta| \ge 1$ $\forall$ $\theta \in R$

(3) $\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$; $|\text{cosec}\,\theta| \ge 1$ $\forall$ $\theta \in R$

3. महत्वपूर्ण त्रिकोणमितीय अनुपात (IMPORTANT TRIGONOMETRIC RATIOS) :

(1) $\sin n\pi = 0$; $\cos n\pi = (-1)^n$; $\tan n\pi = 0$ जहाँ $n \in I$ हैं।

(2) $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = (-1)^n$ और $\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$ जहाँ $n \in I$ हैं।

(3) $\sin 15°$ या $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \cos 75°$ या $\cos \frac{5\pi}{12}$;

$\cos 15°$ या $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \sin 75°$ या $\sin \frac{5\pi}{12}$;

$\tan 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3} = \cot 75°$; $\tan 75° = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2+\sqrt{3} = \cot 15°$

(4) $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$; $\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2}+1$

(5) $\sin\frac{\pi}{10}$ या $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \cos 72°$ और $\cos 36°$ या $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \sin 54°$

4. संबद्ध कोणों के त्रिकोणमितीय फलन (TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF ALLIED ANGLES):

यदि θ कोई कोण है, तो $-\theta$, $90 \pm \theta$, $180 \pm \theta$, $270 \pm \theta$, $360 \pm \theta$ आदि **संबद्ध कोण** कहलाते हैं।

(1) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\cos(-\theta) = \cos\theta$

(2) $\sin(90°-\theta) = \cos\theta$; $\cos(90°-\theta) = \sin\theta$

(3) $\sin(90°+\theta) = \cos\theta$; $\cos(90°+\theta) = -\sin\theta$

(4) $\sin(180°-\theta) = \sin\theta$; $\cos(180°-\theta) = -\cos\theta$

(5) $\sin(180°+\theta) = -\sin\theta$; $\cos(180°+\theta) = -\cos\theta$

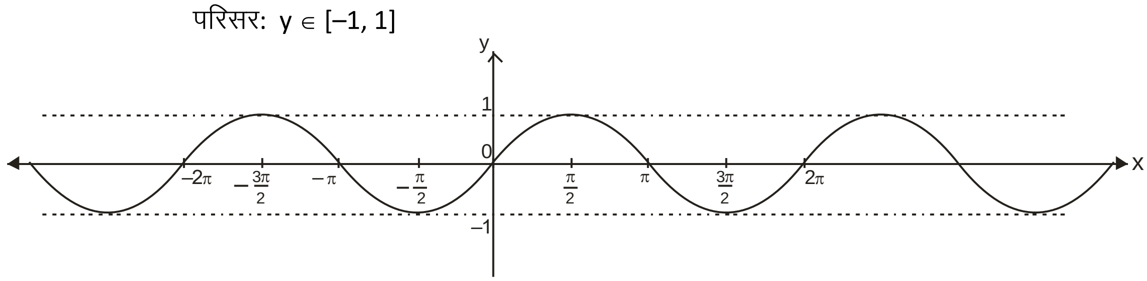
(6) $\sin(270°-\theta) = -\cos\theta$; $\cos(270°-\theta) = -\sin\theta$

(7) $\sin(270°+\theta) = -\cos\theta$; $\cos(270°+\theta) = \sin\theta$

5. त्रिकोणमितीय फलन (TRIGONOMETRIC FUNCTIONS):

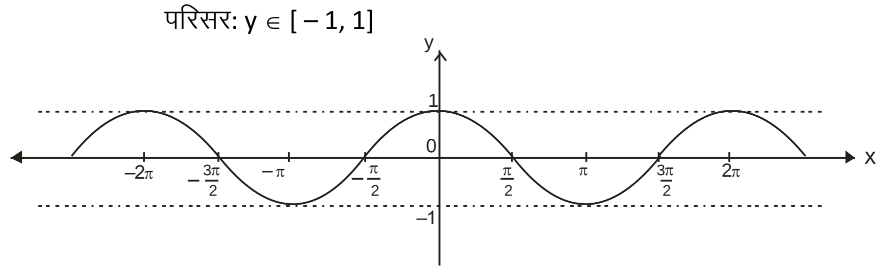
(i) y = sin x प्रांत: $x \in R$

परिसर: $y \in [-1, 1]$



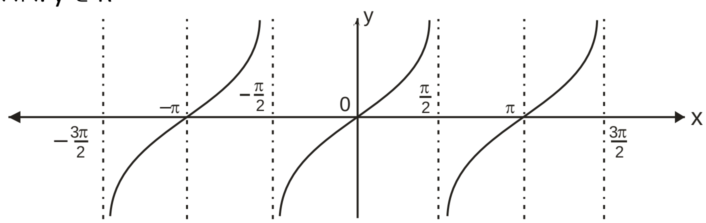
(ii) y = cos x प्रांत: $x \in R$

परिसर: $y \in [-1, 1]$



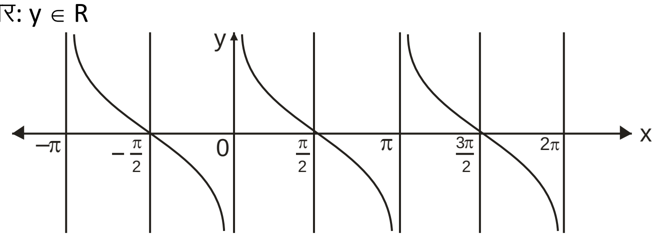
(iii) y = tan x प्रांत: $x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\},\ n \in I$

परिसर: $y \in R$



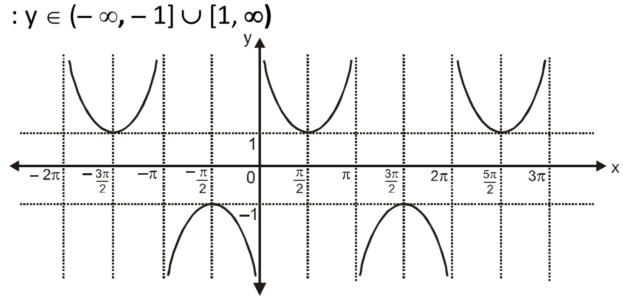
(iv) y = cot x प्रांत: $x \in R - \{n\pi\},\ n \in I$

परिसर: $y \in R$



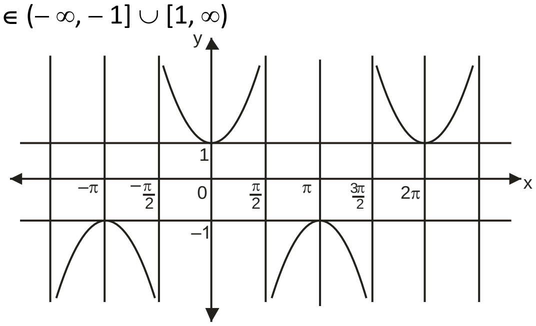
(v) y = cosec x प्रांत : $x \in R - \{n\pi\},\ n \in I$

परिसर : $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



(vi) y = sec x प्रांत: $x \in R - \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\},\ n \in I$

परिसर : $y \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$



6. दो कोणों के योग या अंतर के त्रिकोणमितीय फलन (TRIGONOMETRIC FUNCTIONS OF SUM OR DIFFERENCE OF TWO ANGLES) :

(1) $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

(2) $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

(3) $\sin^2A - \sin^2B = \cos^2B - \cos^2A = \sin(A+B) \cdot \sin(A-B)$

(4) $\cos^2A - \sin^2B = \cos^2B - \sin^2A = \cos(A+B) \cdot \cos(A-B)$

(5) $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

(6) $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

7. रूपान्तरण सूत्र (TRANSFORMATION FORMULAE) :

(i) $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A\cos B$

(ii) $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A\sin B$

(iii) $\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cos A\cos B$

(iv) $\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin A\sin B$

(v) $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

(vi) $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$

(vii) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

(viii) $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

SOLVED EXAMPLES

Example: 1 व्यजंक $1 - \frac{\sin^2 y}{1+\cos y} + \frac{1+\cos y}{\sin y} - \frac{\sin y}{1-\cos y}$ का मान बराबर है –

(1) 0 (2) 1 (3) sin y (4) cos y

Solution: $1 - \frac{\sin^2 y}{1+\cos y} + \frac{1+\cos y}{\sin y} - \frac{\sin y}{1-\cos y} = \frac{1+\cos y-\sin^2 y}{1+\cos y} + \frac{1-\cos^2 y-\sin^2 y}{\sin y\,(1-\cos y)} = \frac{\cos y+\cos^2 y}{1+\cos y} + 0 = \cos y$

Example: 2 यदि $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = m$ और $\sec\theta - \cos\theta = n$ हो, तो $(m^2n)^{2/3} + (n^2m)^{2/3}$ बराबर है।

(1) 0 (2) 1 (3) –1 (4) 2

Solution: $\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta = m$

$m = \frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}$ ...(i)

$n = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$ ...(ii)

समी. (i) और (ii) से

$m \times n = \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \sin\theta\cos\theta$

समी. (i) से $\cos^2\theta = m \cdot \sin\theta$

या $\cos^3\theta = m\sin\theta\cos\theta = m \cdot (mn) = m^2n$

इसी प्रकार $\sin^3\theta = n^2m$

अत: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$(n^2m)^{2/3} + (m^2n)^{2/3} = 1$

Example: 3 सिद्ध कीजिए कि

(i) $\sin(45° + A)\cos(45° - B) + \cos(45° + A)\sin(45° - B) = \cos(A - B)$

(ii) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right) = -1$

Solution: (i) $\sin(45° + A)\cos(45° - B) + \cos(45° + A)\sin(45° - B)$ $(\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B)$

$= \sin(45° + A + 45° - B) = \sin(90° + A - B) = \cos(A - B)$

(ii) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) \times \tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right) = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} \times \frac{-1+\tan\theta}{1+\tan\theta} = -1$

Example: 4 सिद्ध कीजिए कि $\cos 7A + \cos 8A = 2\cos\left(\frac{15A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ है।

Solution: L.H.S. $\cos 7A + \cos 8A = 2\cos\left(\frac{15A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)$

$[\because \cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}]$,

Example: 5 $2\sin 3\theta \sin\theta - \cos 2\theta + \cos 4\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

Solution: $2\sin 3\theta \sin\theta - \cos 2\theta + \cos 4\theta = 2\sin 3\theta \sin\theta - 2\sin 3\theta \sin\theta = 0$

Example: 6 सिद्ध कीजिए कि

(i) $\frac{\sin 8\theta \cos\theta - \sin 6\theta \cos 3\theta}{\cos 2\theta \cos\theta - \sin 3\theta \sin 4\theta} = \tan 2\theta$

(ii) यदि $A + B = 45°$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ है।

Solution: (i) $\frac{2\sin 8\theta \cos\theta - 2\sin 6\theta \cos 3\theta}{2\cos 2\theta \cos\theta - 2\sin 3\theta \sin 4\theta} = \frac{\sin 9\theta + \sin 7\theta - \sin 9\theta - \sin 3\theta}{\cos 3\theta + \cos\theta - \cos\theta + \cos 7\theta} = \frac{2\sin 2\theta \cos 5\theta}{2\cos 5\theta \cos 2\theta} = \tan 2\theta$

(ii) $A + B = 45°$

$\tan(A + B) = 1 \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = 1$

$\tan A + \tan B = 1 - \tan A \tan B \Rightarrow \tan A + \tan B + \tan A \tan B + 1 = 2$

$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$

Example: 7 $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1$ बराबर है

(1) 0 (2) 1 (3) −2 (4) इनमें से कोई नहीं

Solution: $2[(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)] - 3[(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2] - 2\sin^2\theta\cos^2\theta + 1$

$\Rightarrow 2[1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta] - 3[1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta] + 1 \Rightarrow 2 - 6\sin^2\theta\cos^2\theta - 3 + 6\sin^2\theta\cos^2\theta + 1 = 0$

Example: 8 यदि $3\sin\theta + 4\cos\theta = 5$ हो, तो $4\sin\theta - 3\cos\theta$ का मान है

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

Solution: माना $4\sin\theta - 3\cos\theta = a$

अब θ को विलुप्त करने के लिए समीकरणों $3\sin\theta + 4\cos\theta = 5$ और $4\sin\theta - 3\cos\theta = a$, को वर्ग करने और जोड़ने पर,

$(3\sin\theta + 4\cos\theta)^2 + (4\sin\theta - 3\cos\theta)^2 = 25 + a^2$

$9\sin^2\theta + 16\cos^2\theta + 24\sin\theta\cos\theta + 16\sin^2\theta + 9\cos^2\theta - 24\cos\theta\sin\theta = 25 + a^2$

$9 + 16 = 25 + a^2$

या $a^2 = 0$

$a = 0$

अतः $4\sin\theta - 3\cos\theta = 0$

Example: 9 यदि $x = r\sin\theta\cos\phi$, $y = r\sin\theta\sin\phi$ और $z = r\cos\theta$ हो, तो $x^2 + y^2 + z^2$ का मान बराबर है।

(1) $2r^2$ (2) r^2 (3) 0 (4) इनमें से कोई नहीं

Solution: यहाँ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin^2\theta . \sin^2\phi + r^2\cos^2\theta$

$= r^2\sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + r^2\cos^2\theta = r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r^2$

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Example: 10 $\sqrt{3}$ cosec20° – sec 20° बराबर है

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 4

Solution: $\frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ}-\frac{1}{\cos 20^\circ}=\frac{\sqrt{3}\cos 20^\circ-\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ.\cos 20^\circ}=\frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 20^\circ\right)}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}$

$= 4.\frac{(\sin 60^\circ.\cos 20^\circ-\cos 60^\circ.\sin 20^\circ)}{\sin 40^\circ}$

$= 4\ \frac{\sin(60^\circ-20^\circ)}{\sin 40^\circ}=4.\frac{\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=4$

Example: 11 sin78° – sin66° – sin42° + sin 6° बराबर है।

(1) 1/2 (2) –1/2 (3) 2 (4) –2

Solution: व्यंजक

= (sin78° – sin42°) – (sin 66° – sin6°) = 2cos (60°) sin (18°) – 2 cos 36° . sin 30°

$= \sin 18^\circ - \cos 36^\circ = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)=-\frac{1}{2}$

Example: 12 [–π, π] में α के सभी संभावित मानों का समुच्चय इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$, (sec α – tan α) के बराबर है

(1) $\left(\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (3) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (4) इनमें से कोई नहीं

Solution: स्पष्टतः $\alpha \neq \pm\pi/2$

तो $\sec\alpha - \tan\alpha = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ...(i)

तथा $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}}=\left|\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right|=\frac{1-\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$ ....(ii)

समी. (i) और (ii) से दो व्यंजक केवल तभी बराबर होते हैं यदि $\cos\alpha > 0$ हो, अर्थात $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ हो

$\therefore$ $\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ और sec α – tan α बराबर होते हैं

केवल जब $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ हो।

Example: 13 यदि $1+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ हो, तो f(θ) का अधिकतम मान है ।

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

Solution: हमारे पास है $1+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$= 1+\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)+\sqrt{2}(\cos\theta+\sin\theta)=1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)(\cos\theta+\sin\theta)$

$= 1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right).\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ का अधिकतम मान

$1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right).\sqrt{2}=4$ होगा ।

Example: 14 sin 20° sin 40° sin 60° sin 80° का मान है।

(1) 3/8 (2) 1/8 (3) 3/16 (4) इनमें से कोई नहीं

Solution: sin 20° sin 40° sin 60° sin 80°

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ \sin(60^\circ - 20^\circ)\sin(60^\circ + 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\left(\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 20^\circ\left(\frac{3}{4} - \sin^2 20^\circ\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}(3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{8}\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

Example: 15 sin600° का मान है।

Solution: $\sin(3(180^\circ) + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

8. अपवर्त्य कोण और अपवर्तक कोण (MULTIPLE ANGLES AND HALF ANGLES)

(1) $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$; $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

(2) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$;

$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$.

$2\cos^2 A = 1 + \cos 2A$, $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$; $\tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

$2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cos\theta$, $2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$.

(3) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$; $\tan\theta = \frac{2\tan(\theta/2)}{1-\tan^2(\theta/2)}$

(4) $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$, $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(5) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(6) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(7) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

9. तीन कोण (THREE ANGLES):

(i) $\sin(A + B + C) = \sin A\cos B\cos C + \sin B\cos A\cos C + \sin C\cos A\cos B - \sin A\sin B\sin C$

(ii) $\cos(A + B + C) = \cos A\cos B\cos C - \cos A\sin B\sin C - \sin A\cos B\sin C - \sin A\sin B\cos C$

(iii) $\tan(A + B + C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan A\tan B - \tan B\tan C - \tan C\tan A}$.

DETECTIVE MIND

$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ... + \theta_n) = \dfrac{S_1 - S_3 + S_5 - ......}{1 - S_2 + S_4 - ....}$

जहाँ S_i एक समय में लिए गए कोणों i के tangent के गुणनफल के योग को दर्शाता है।

10. प्रतिबंध सर्वसमिकाएँ (CONDITIONAL IDENTITIES) :

यदि $A + B + C = \pi$ हो, तो

(i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

(ii) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$

(iii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C$

(iv) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$

(v) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

(vi) $\tan\frac{A}{2} \tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2} \tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2} \tan\frac{A}{2} = 1$

(vii) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2} = \cot\frac{A}{2} . \cot\frac{B}{2} . \cot\frac{C}{2}$

(viii) $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

(ix) $A + B + C = \frac{\pi}{2}$ हो, तो $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$

11. Sine और Cosine श्रृंखला (Sine and Cosine Series) :

(i) $\sin\alpha + \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + 2\beta) + ... + \sin\{\alpha + (n-1)\beta\} = \dfrac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \sin\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)$

(ii) $\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) + ... + \cos\{\alpha + (n-1)\beta\} = \dfrac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} \cos\left(\alpha + \frac{n-1}{2}\beta\right)$

जहाँ : $\beta \neq 2m\pi,\ m \in I$

12. Cosine कोणों की गुणनफल श्रृंखला (PRODUCT SERIES OF COSINE ANGLES)

$\cos\theta . \cos 2\theta . \cos 2^2\theta . \cos 2^3\theta ...... \cos 2^{n-1}\theta = \dfrac{\sin 2^n\theta}{2^n \sin\theta}$

13. त्रिकोणमितीय फलनों के अधिकतम और न्यूनतम मान (MAXIMUM & MINIMUM VALUES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS) :

(1) $a^2\tan^2\theta + b^2\cot^2\theta$ का न्यूनतम मान 2ab है जहाँ $\theta \in R$ है।

(2) $a\cos\theta + b\sin\theta$ का अधिकतम और न्यूनतम मान $\sqrt{a^2 + b^2}$ तथा $-\sqrt{a^2 + b^2}$ है।

(3) यदि $f(\theta) = a\cos(\alpha + \theta) + b\cos(\beta + \theta)$ हो, जहाँ a, b, α तथा β ज्ञात मात्राएँ हैं, तो $-\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)} \leq f(\theta) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)}$ हैं।

(4) यदि A, B, C एक त्रिभुज के कोण हैं, तो
sinA + sinB + sinC और sinA sinB sinC का अधिकतम मान तब होता है जब A = B = C = 60° हो।

(5) यदि sinθ या cosθ द्विघात के रूप में दिया हो तो एक पूर्ण वर्ग बनाकर अधिकतम या न्यूनतम मानों की व्याख्या की जा सकती है।

SOLVED EXAMPLES

Example: 16 यदि cos 2x + 2 cos x = 1 हो, तो $\sin^2x\,(2-\cos^2x)$ बराबर है।

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 4.

Solution: यहाँ, cos 2x + 2 cos x = 1

$\Rightarrow 2\cos^2x-1+2\cos x-1=0$

$\Rightarrow \cos^2x+\cos x-1=0$

या $\cos x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ अमान्य $\quad\therefore\; -1\le \cos x\le 1$ और $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)<-1$

$\cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = 3-\sqrt{5}$

$\sin^2x\,(2-\cos^2x) = \left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)=1$

Example: 17 $\sin 67\frac{1}{2}^\circ + \cos 67\frac{1}{2}^\circ$ बराबर है।

(1) $\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{2}}$ (3) $-\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{2}\sqrt{-4+2\sqrt{2}}$

Solution: $\sin 67\frac{1}{2}^\circ + \cos 67\frac{1}{2}^\circ = \sqrt{1+\sin 135^\circ} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ($\cos A+\sin A = \sqrt{1+\sin 2A}$ का उपयोग करने पर)

$=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{2}}$

Example: 18 $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)$ का मान है।

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\cos\frac{\pi}{8}$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

Solution: $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right)\left(1+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$= \left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right) = \left(1-\cos^2\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(2-1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(2-1-\cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\cos\frac{3\pi}{4}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$

Example: 19 $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}$ का मान है।

(1) 0 (2) 1 (3) $\frac{1}{2}$ (4) इनमे से कोई नही

Solution: हम जानते है $\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+\overline{n-1}\beta) = \dfrac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}\cos\dfrac{2\alpha+(n-1)\beta}{2}$

यहाँ $\alpha = \dfrac{\pi}{11}, \beta = \dfrac{2\pi}{11}, n=5$

$$\Rightarrow \frac{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\times\frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\times\frac{1}{2}\right)}\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{11}+\frac{8\pi}{11}}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\frac{10\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{11}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{11}\right)}{\sin\frac{\pi}{11}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{\sin\frac{\pi}{11}}\right] = \frac{1}{2}$$

Example: 20 $\cos^4\dfrac{\pi}{8} + \cos^4\dfrac{3\pi}{8} + \cos^4\dfrac{5\pi}{8} + \cos^4\dfrac{7\pi}{8}$ बराबर है –

(1) 1/2 (2) 1/4 (3) 3/2 (4) 3/4

Solution: $= \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8} = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{\pi}{8}$

$= 2\left(\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(2\cos^2\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(2\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2\right] = \frac{1}{2}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right] = \frac{1}{2}[2+1] = \frac{3}{2}$

Example: 21 यदि $A + B + C = \dfrac{3\pi}{2}$ हो, तो $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C =$

(1) 1 – 4 cos A cos B cos C (3) 4 sin A sin B sin C

(3) 1 + 2 cos A cos B cos C (4) 1 – 4 sin A sin B sin C

Solution: cos 2A + cos 2B + cos 2C

= 2cos (A + B) cos (A – B) + cos 2C

$= 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-C\right)\cos(A-B) + \cos 2C \quad \because A+B+C = \frac{3\pi}{2}$

$= -2\sin C\cos(A-B) + 1 - 2\sin^2 C = 1 - 2\sin C[\cos(A-B) + \sin C)$

$= 1 - 2\sin C\left[\cos(A-B) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - (A+B)\right)\right] = 1 - 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$

= 1 – 4 sin A sin B sin C

Example: 22 किसी त्रिभुज ABC में, sin A – cos B = cos C हो, तो कोण B है –

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

Solution: दिया है , sin A – cos B = cos C

sin A = cos B + cos C

$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$

$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \cos\left(\frac{\pi - A}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$

$\because A + B + C = \pi$

$2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \sin\frac{A}{2} \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$

$\cos \frac{A}{2} = \cos \frac{B-C}{2}$ या $A = B - C$

लेकिन $A + B + C = \pi$

इसलिए $2B = \pi \Rightarrow B = \pi/2$

Example: 23 $\tan 9° - \tan 27° - \tan 63° + \tan 81°$ बराबर है –

(1) 0 (2) 1 (3) –1 (4) 4

Solution: $\tan 9° + \tan 81° - (\tan 27° + \tan 63°)$

$(\tan 9° + \cot 9°) - (\tan 27° + \cot 27°)$

$= \left(\frac{\sin 9º}{\cos 9º} + \frac{\cos 9º}{\sin 9º}\right) - \left(\frac{\sin 27º}{\cos 27º} + \frac{\cos 27º}{\sin 27º}\right) = \frac{1}{\sin 9º \cos 9º} - \frac{1}{\cos 27º \sin 27º}$

$= \frac{2}{\sin 18} - \frac{2}{\sin 54^{\circ}} = \frac{2}{\sin 18^{\circ}} - \frac{2}{\sin 36º} = \frac{2 \times 4}{\sqrt{5}-1} - \frac{2 \times 4}{\sqrt{5}+1} = 8\left[\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}\right] = \frac{16}{4} = 4$