02. सदिश तथा अदिश राशियाँ (Vector & Scalar Quantity)

❖ **अदिश राशि (Scalar Quantity)–** वैसी राशियाँ जिसमें केवल परिमाण होता है किन्तु दिशा नहीं होती है उसे अदिश राशि कहते हैं।

जैसे– द्रव्यमान, समय, दाब, ऊर्जा, क्षेत्रफल, आयतन लम्बाई, धारा इत्यादि।

❖ यह साधारण बीजगणित के नियमों का पालन करती है।

Note :– धारा की दिशा होती है किन्तु वह सदिश के योग का नियम का पालन नहीं करता है।

❖ **सदिश राशि (Vector Quantity)–** वैसी राशियाँ जिनका परिमाप के साथ दिशा भी हो उसे सदिश राशि कहते हैं।

जैसे– विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, संवेग, आवेग, विद्युत क्षेत्र की तीव्रता, चुम्बकीय क्षेत्र की तीव्रता, भार।

Trick :– व / ब / ण

❖ विस्थापन, वेग, त्वरण, संवेग, आवेग, विद्युत ध्रुव, तीव्रता

❖ घर्षण, आघूर्ण, गुरुत्वाकर्षण

अपवाद– दाब, घनत्व, द्रव्यमान, विद्युत धारा, विभव।

❖ यह साधारण बीजगणित के नियमों का पालन नहीं करती है।

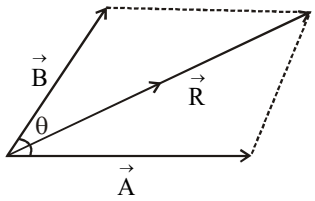
❖ **सदिशों का निरूपण (Representation of a Vector)–** सदिशों को निरूपित करने के लिए किसी भी भौतिक राशि के ऊपर तीर के चिन्ह ($\rightarrow$) का प्रयोग किया जाता है जहाँ तीर का माथा उसकी दिशा को बताता है तथा उसकी लम्बाई उसके परिमाण को बताता है।

$\vec{A}$ A

सदिश अदिश

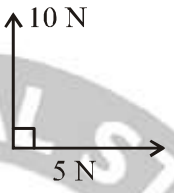
❖ **सदिशों के जोड़ का नियम–** सदिश राशि को जोड़ने के लिए त्रिभुज नियम या समानान्तर चतुर्भुज का नियम का पालन करते हैं।

❖ **समांतर चतुर्भुज का नियम (Law of Parallelogram)–** यदि कोई दो सदिश A और B एक दूसरे से θ कोण पर हों तो उसके परिणामी का परिमाण–



$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

1. 10 N का बल उत्तर दिशा में तथा 5N का एक बल पूरब दिशा में कार्य करता है। इनके बीच का परिणामी बल ज्ञात करें।



$$\boxed{R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}}$$

$$R = \sqrt{10^2 + 5^2 + 2\times10\times5\cos90}$$

$$= \sqrt{100 + 25 + 100\times0} = \sqrt{125 + 0}$$

$$= \sqrt{125} = \sqrt{25\times5} = 5\sqrt{5}$$

Remark :– जब $\theta = 0°$ होगा तो परिणामी अधिकतम होगा।

$$R_{max} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$

$$= \sqrt{A^2B^2 + 2AB\cos0}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\times1}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB} = \sqrt{(A+B)^2} \quad \boxed{R_{max} = (A+B)}$$

Remark :– जब $\theta = 180°$ होगा तो परिणामी न्यूनतम होगा ?

$$R_{min} = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos180}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\times-1} \quad \boxed{\cos180 = -1}$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB} \quad = \sqrt{(A-B)^2}$$

$$\boxed{R_{min} = (A-B)}$$

❖ $\boxed{\text{Rang} = \min \longrightarrow \text{Max}}$

Minimum से कम तथा Maximum से ज्यादा मान संभव नहीं है।

Q. 10 N तथा 5 N के दो बल का परिणामी कभी भी नहीं होगा।

(a) 8 N **(b) 15 N** (c) 12 N (d) 3 N (Min Range से कम है।)

Sol^{n} : Min = A – B Max = A + B
= 10 – 5 = 10 + 5
= 5 = 15
Range = 5 → 15

Q. दो बल जिनका मान समान है यदि इनका परिणामी भी सामान हो जाए तो इनके बीच का कोण ज्ञात करें।

Sol^{n} : A = B = R (माना) माना R = x

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

$x = \sqrt{x^2 + x^2 + 2 \times x \times x\cos\theta}$

$x = \sqrt{2x^2 + 2x^2\cos\theta}$, $x = \sqrt{2x^2(1+\cos\theta)}$

Squaring Both Side , $x^2 = 2x^2(1+\cos\theta)$

$\frac{1}{2} = 1 + \cos\theta$

$\frac{1}{2} - 1 = \cos\theta$

$-\frac{1}{2} = \cos\theta$

$\cos\theta = \cos 120$

$\theta = 120$

Q. दो समान बल का परिणामी दोनों बलों के योग के बराबर है उनके बीच का कोण ज्ञात करें।

Sol^{n} : A = B = x (माना)

R = A + B
= x + x = 2x

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$

$2x = \sqrt{x^2 + x^2 + 2x^2\cos\theta}$

$2x = \sqrt{2x^2 + 2x^2\cos\theta}$

$2x = \sqrt{2x^2(1+\cos\theta)}$

Squaring Both side

$4x^2 = 2x^2(1+\cos\theta)$

$2 = 1 + \cos\theta$

$1 = \cos\theta$

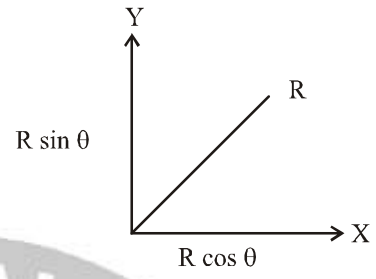
$\cos 0 = \cos\theta$

$\boxed{\theta = 0}$

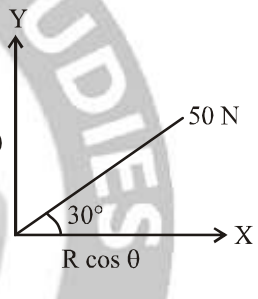
❖ **सदिश का वियोजन (Dissociation of Vector)–** जब दो सदिश का परिणामी दिया हो तो x अक्ष y अक्ष पर मान ज्ञात करने के लिए

x अक्ष के लिए R cosθ

y अक्ष के लिए R sinθ



Q. 50N का एक बल 30 अंश के कोण पर कार्य कर रहा है। x तथा y पर परिणामी ज्ञात करें।



Sol^{n} :

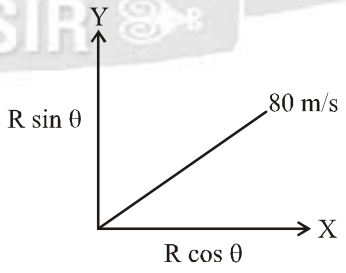
X अक्ष = $R\cos\theta$ Y अक्ष = $R\sin\theta$

$50\cos 30$ $50\sin 30$

$50\frac{\sqrt{3}}{2}$ $50 \times \frac{1}{2}$

$25\sqrt{3}$N = 25 N

Q. 80 m/s के वेग से गतिशील एक वस्तु 45 अंश के कोण पर गतिशील है तो x तथा y अक्ष का मान ज्ञात करें।



x अक्ष = R cos θ y अक्ष R sin θ

$80 \times \cos 45$ $80 \times \sin 45$

$80 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ $80 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$2\times40\times\frac{1}{\sqrt{2}}$ $2\times40\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$40\sqrt{2}$ N $40\sqrt{2}$ N

Remarks : दो भिन्न- भिन्न सदिश का परिणामी कभी भी शून्य नहीं हो सकता और न ही ऋणात्मक।

A = 5 N
B = 12 N
Max = A + B = 17
Min = A – B = – 7 ✗
B – A = 7 ✓

❖ इकाई सदिश (Unit Vector) = इकाई सदिश दिशा को दिखाते हैं।

x अक्ष = $\hat{i}$

y अक्ष = $\hat{j}$

z अक्ष = $\hat{k}$

❖ **इकाई सदिश का परिणामी**

Q. एक वस्तु का वेग $12\hat{i}+5\hat{j}$ है तो परिणामी ज्ञात करें।

$R=\sqrt{A^2+B^2}$

$=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}=\sqrt{169}=13$ इकाई

Q. एक वस्तु का $10\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}$ है तो परिणामी ज्ञात करें।

$R=\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

$=\sqrt{10^2+5^2+3^2}$

$=\sqrt{100+25+9}$

$=\sqrt{134}$ इकाई

सदिशों का गुणनफल (Multiplication of Vector)

(a) सदिशों का अदिश गुणनफल– सदिशों के अदिश गुणनफल को Dot (.) से सूचित किया जाता है।

❖ यदि कोई दो सदिश A और B एक दूसरे से θ कोण पर हों, तो उनका **अदिश गुणनफल** dot product $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta}$

❖ सदिशों का अदिश गुणनफल एक अदिश राशि होता है।

(b) सदिशों का सदिश गुणनफल– सदिशों के सदिश गुणनफल को Cross (×) से सूचित किया जाता है।

❖ यदि कोई दो सदिश A और B एक दूसरे से θ कोण पर हो तो उनका सदिश गुणनफल–

$\boxed{\vec{A}\times\vec{B}=AB\sin\theta}$ होता है।

❖ सदिशों का सदिश गुणनफल एक सदिश राशि होता है।

Q. 20N तथा 5N के दो बल 30 अंश के कोण पर कार्य कर रहे हैं इनके सदिश तथा अदिश गुणन ज्ञात करें।

सदिश गुणन $=A\times B(\sin\theta)$ अदिश गुणन $=A.B(\cos\theta)$

$20\times5\sin30$ $20\times5\cos30$

$20\times5\times\frac{1}{2}$ $20\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

50 $50\sqrt{3}$

Q. दो सदिश के सदिश गुणन तथा अदिश गुणन आपस में बराबर है।

$A\times B=A.B$

$A.B\sin\theta=A.B\cos\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=1$

$\tan\theta=1$ $\boxed{\theta=45}$

Q. दो सदिश का सदिश गुणन उनके अदिश गुणन से $\sqrt{3}$ गुणा है कोण ज्ञात करें–

सदिश गुणन = अदिश गुणन $\times\sqrt{3}$

$A\times B=A.B.\sqrt{3}$

$A.B.\sin\theta=A.B\cos\theta\times\sqrt{3}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sqrt{3}$

$\tan\theta=\sqrt{3}$ $\boxed{\theta=60}$

Q. बल तथा विस्थापन का अदिश गुणन कार्य होता है यदि बल 60° अंश पर 40N का लगे तो 2M विस्थापन पर कार्य बताएँ ।

$W=f\times s\cos\theta$ (×)

W = f.s cos θ (✓)

$=40\times2\cos60=40\times2\times\frac{1}{2}=40=40\,J$

Q. बल द्रव्यमान तथा त्वरण का सदिश गुणन होता है। यदि 40 kg की वस्तु तथा 30° के कोण पर कार्य कर रहे 8 m/s² के त्वरण द्वारा उत्पन्न बल ज्ञात करें।

$f=m\times a\sin\theta=40\times8\times\frac{1}{2}=160\,N$

Q. यदि बल $12\hat{i}$ हो तथा विस्थापन $20\hat{j}$ हो तो कार्य बताएं।

$W = f.s$

$\left(12\hat{i}\right) \times \left(20\hat{j}\right)$

[$\because$ i तथा j के बीच $\theta = 90°, \cos 90° = 0$]

$= 0$

Q. यदि बल $5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}$ हो तथा विस्थापन $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ हो तो कार्य ज्ञात करें।

$\left(5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}\right)\left(3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}\right) = 15+24+35 = 74$

Q. बल एक सदिश राशि है यदि द्रव्यमान $3\hat{i}$ तथा त्वरण $12\hat{i}$ हो तो बल ज्ञात करें।

बल $= m \times a$

$\left(3\hat{i}\right) \times \left(12\hat{i}\right)$

[$\because$ i तथा j के बीच $\theta = 0°, \sin 0° = 0$]

$= 0$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

1. अदिश × अदिश = ?
(a) सदिश **(b) अदिश**
(c) (a) या (b) (d) इनमें से कोई नहीं

2. सदिश × सदिश = ?
(a) सदिश **(b) अदिश**
(c) (a) या (b) (d) इनमें से कोई नहीं

3. अदिश × सदिश = ?
(a) सदिश (b) अदिश
(c) (a) या (b) (d) इनमें से कोई नहीं

4. अदिश राशि के उदाहरण है?
(a) बल (b) त्वरण **(c) तापमान** (d) संवेग

5. सदिश राशि के उदाहरण है ?
(a) बल आघूर्ण (b) लंबाई
(c) घनत्व (d) आवृत्ति

6. निम्नलिखित में से किस समूह में सभी राशियाँ सदिश हैं ?
(a) कार्य, ऊर्जा, बल (b) चाल, त्वरण, वेग
(c) वेग, त्वरण, बल (d) ऊष्मा, प्रकाश, विद्युत्

7. समानांतर चतुर्भुज बल के नियम मूलतः कितने परिणाम की गणना के लिए प्रयुक्त किए जाते हैं ?
(a) चार बल (b) तीन बल
(c) दो बल (d) पाँच बल

8. किसी सदिश का घटक होता है ?
(a) सदा इसके परिणाम से कम
(b) सदा इसके परिमाण से अधिक
(c) सदा इसके परिमाण के बराबर
(d) सदिश के परिमाण के बराबर या इससे कम

9. दो सदिशों के गुणनफल से प्राप्त राशि होता है–
(a) सदिश (b) अदिश
(c) (a) या (b) **(d) इनमें से कोई नहीं**

10. शून्य परिणामी उत्पन्न करने के लिए समान परिमाण के आवश्यक सदिशों की न्यूनतम संख्या है ?
(a) दो (b) तीन
(c) चार (d) चार से अधिक

●●●