KHAN GLOBAL STUDIES
Kisan Cold Storage, Sai Mandir, Musallahpur Hatt, Patna - 6
Mob. : 8877918018, 8757354880

PHYSICS - PROJECTILE MOTION

By : Khan Sir
(मानचित्र विशेषज्ञ)

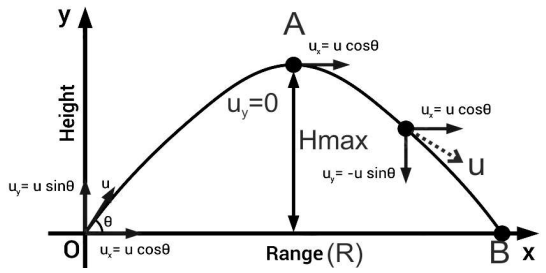
❖ जब किसी वस्तु को एक बार बल लगाकर θ कोण पर फेंक दिया जाता है तो ऐसी गति को प्रक्षेप्य गति कहते हैं। प्रक्षेप्य का पथ परवलयाकार होता है।

जैसे–भाला फेंकने पर भाले की गति, किसी खिलाड़ी द्वारा फेंके गये गोलों की गति, छक्का मारने पर बॉल की गति।

☞ इसे द्विविमीय गति (Two Dimentional Motion) भी कहते है।

☞ **नोट :** अगर कोई शिकारी पेड़ पर बैठे किसी बंदर पर गोली चला रहा है और गोली के चलते ही बंदर कूद जाता है तो संभावना है कि बंदर को गोली लग जाएगी, क्योंकि पहले गोली का पथ सरल रेखीय होगा और फिर गोली का पथ प्रक्षेप्य (परवलयाकार) हो जाएगा ।

☞ प्रक्षेप्य गति में प्रक्षेप्य द्वारा एक साथ तथा स्वतंत्र रूप से दो सरल रेखीय गतियाँ की जाती है।



θ = प्रक्षेपण कोण (Projected Angle)

0 = प्रक्षेप्य बिंदु (Projectile Point)

u = प्रारंभिक वेग (Intial Velocity)

g = गुरुत्वीय त्वरण (Gravitation Acceleration)

H_{max} = महत्तम ऊँचाई (Maximum Height)

R = परास (Range)

☞ बिंदु 0 से बिंदु B तक पहुँचने में लगा समय उड्डयन काल (T) कहते है।

(i) x-अक्ष →x- अक्ष पर एक समान वेग से क्षैतिज गति करते हुए आगे बढ़ता है।

(ii) y- अक्ष → y- अक्ष पर एकसमान त्वरण से ऊर्ध्वाधर गति करते हुए नीचे आता है।

परास (Range) = *R*

प्रक्षेप्य के दौरान भूमि पर तय की गई दूरी को परास या Range कहते हैं। इसे R से सूचित किया जाता है।

Range $\boxed{R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}}$

☞ यदि $\theta = 45°$

$$R_{max} = \frac{u^2 \sin 2\times 45°}{g}$$

$$R_{max} = \frac{u^2 \sin 90°}{g}$$

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

Note :– अगर किसी वस्तु को क्षैतिज से 45° के प्रक्षेप्य कोण पर फेंका जाए तो वह पिण्ड अधिकतम संभव परास प्राप्त करेगा।

Q. क्षैतिज से किसी वस्तु को फेंकने पर वह अधिक दूरी तय करती है। यदि उसकी प्रारंभिक वेग समान रहे तो उसका कोण कितना होगा?

Sol. 45°

Q. एक भाला को 60 m/sec के वेग से 30° के कोण पर फेंका जाता है। वह कितनी दूरी पर जाकर गिरेगा।

Sol. $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$$= \frac{(60)^2 \times \sin 2\times 30}{10} = \frac{3600 \times \sin 60}{10}$$

$$= \frac{3600 \times \sqrt{3}/2}{10} = 180\sqrt{3}$$

45° पर Range अधिकतम हो जाता है। इसी कारण भाला को 45° के कोण पर फेंका जाता है।

Q. एक भाला को 12 m/sec की वेग से 45° के कोण पर फेंका जाता है। Range ज्ञात करें।

Sol. $R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$

$$= \frac{12^2 \times \sin 2\times 45}{10} = \frac{144 \times \sin 90°}{10}$$

$$= \frac{144 \times 1}{10} = 14.4$$

Q. किसी वायुयान से कोई वस्तु नीचे गिराने पर उसकी गति कैसी होगी?

Sol. प्रक्षेप्य गति

Q. अगर किसी वस्तु को 30° के कोण पर 10 m/s के वेग से प्रक्षेपित किया जाता है, तो परास क्या होगा?

Sol. u = 10 m/s

$\theta = 30°$

$$R = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(10^2) \times \sin 2 \times 30°}{10}$$

$$= 5\sqrt{3}$$

Q. अधिकतम ऊँचाई पर किसी प्रक्षेप्य की गति उसकी प्रारंभिक गति की आधी होती है तो उसके प्रक्षेपण का कोण है।

(a) 60° (b) 15° (c) 30° (d) 45°

Sol. $v = \frac{u}{2}$

$v = u \cos\theta$

$$\frac{u}{2} = u \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$\theta = 60°$

उड्डयन काल (Time of Flight) = T

प्रक्षेप्य गति के दौरान कोई वस्तु जितनी देर हवा में रहती है। उस समय को उड्डयन काल कहते हैं।

$$\boxed{T = \frac{2u \sin\theta}{g}}$$

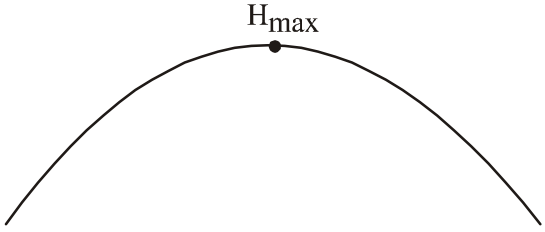
Q. एक तोप के गोला को 30° के कोण पर 60m की वेग से फेंका जाता है तो कितनी देर बाद वह पृथ्वी पर गिरेगा ?

Sol.

$$T = \frac{2u \sin\theta}{g} = \frac{2 \times 60 \times \sin 30°}{10} = \frac{120 \times 1/2}{10} = 6$$

महत्तम ऊँचाई (Maximum Height) = H

प्रक्षेप के दौरान वस्तु विभिन्न ऊंचाई पर गति करती है इन सभी में जो सबसे अधिक ऊंचाई होती है उसे ही महत्तम ऊंचाई कहते हैं।



$$\boxed{H_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}}$$

Q. एक वस्तु को 120 m/sec की वेग से 30° के कोण पर फेंका जाता है तो वह अधिकतम कितनी ऊंचाई पर जाएगा ?

Sol. $$H_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{120 \times 120 \times \sin^2 30°}{2 \times 10}$$

$$= \frac{120 \times 120 \times 1/4}{20} = 180$$

☞ **चढ़ान काल या उतरान काल (Time of Ascent / Descent)**

चढ़ने या उतरने में लगे समय को चढ़ान या उतरान काल कहते हैं।

$$\boxed{T = \frac{u \sin\theta}{g}}$$

Trick :

$$H = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$R. = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g}$$

$$T. = \frac{2u \sin\theta}{g}$$

Numerical Questions

1. एक खिलाड़ी गेंद को 50 मी० ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर फेंक सकता है तो वह कितनी अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है ?

(a) 150 मी० (b) 100 मी०

(c) 75 मी० (d) N.O.T

Sol. (b) $H_{max} = 50$ cm

$$R_{max} = \frac{u^2 \sin(2 \times 45)}{g} = \frac{u^2}{g}$$

$$R_{max} = \frac{u^2}{g} = 100, \quad H_{max} = \frac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$$

$$50 = \frac{u^2 \sin^2 90}{2g}, \quad 50 = \frac{u^2}{2g}, \quad 100 = \frac{u^2}{g}$$

2. एक खिलाड़ी एक गेंद को अधिकतम 100 मीटर की क्षैतिज दूरी तक फेंक सकता है। गेंद का प्रक्षेपण वेग (लगभग) होगा ?

(a) 30 ms^{-1} (b) 42 ms^{-1}

(c) 32 ms^{-1} (d) 35 ms^{-1}

Sol. (c) $$R_{max} = \frac{u^2}{g} = 100$$

$$\Rightarrow u = 10\sqrt{10} = 32 \text{ m/s}$$

3. प्रक्षेप्य गति में अधिकतम परास व उड़ान समय के वर्ग का अनुपात है ?

(a) 10 : 49 (b) 49 : 10

(c) 98 : 10 (d) 10 : 98

Sol. (b) अधिकतम परास के लिये $\theta = 45^\circ$

$$\frac{R_{\text{अधिकतम}}}{T^2} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \Big/ \frac{4u^2 \sin^2 \theta}{g^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{R_{\text{अधिकतम}}}{T^2} = \frac{\sin 90^\circ \times g}{4 \times \sin^2 45^\circ} = \frac{49}{10} \text{ Ans.}$$

4. एक लड़का एक पत्थर को अधिकतम 10 m की ऊँचाई तक फेंक सकता है। लड़का उसी पत्थर को जिस अधिकतम क्षैतिज दूरी तक फेंक सकेगा, वह है ?

(a) $20\sqrt{2}$m (b) 10m

(c) $10\sqrt{2}$m (d) 20m

Sol. (d) प्रक्षेप्य की अधिकतम ऊँचाई

$$h_{max} = \frac{u^2}{2g} = 10$$

$$u^2 = 200$$

$$R_{max} = \frac{u^2}{g} = 20\text{m}$$

5. किसी प्रक्षेप्य की अधिकतम क्षैतिज परास 400m है। इसके द्वारा प्राप्त अधिकतम ऊँचाई का मान होगा

(a) 100 m (b) 200 m

(c) 400 m (d) 800 m

Sol. (b) दिया है,

अधिकतम क्षैतिज परास $R_{max} = 400$

$$R_{max} = \frac{u^2}{g}$$

परास महत्तम होने पर,

$$H = \frac{R_{max}}{4}, \quad R_{max} = 4H, \quad 400 = 4H$$

$H = 100$m

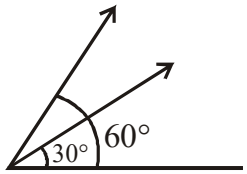
6. दो गेंदे क्षैतिज से 30° तथा 60° दिशाओं में एक ही बिन्दु से प्रक्षेपित की जाती है तो दोनों गेंदे एक ही ऊँचाई तक जाती है उनके प्रक्षेपण वेगों का अनुपात होगा ?

(a) $\sqrt{3}:2$ (b) $\sqrt{3}:3$

(c) $\sqrt{3}:5$ (d) $\sqrt{3}:1$

Sol. (d) $H_{30} = H_{60}$

$$\frac{H_{30} = \dfrac{u_1^2 \sin^2 30^\circ}{2g}}{H_{60} = \dfrac{u_2^2 \sin^2 60^\circ}{2g}}$$



$$\Rightarrow \frac{\dfrac{u_1^2 \sin^2 30^\circ}{2g}}{\dfrac{u_2^2 \sin 60^\circ}{2g}} \qquad \Rightarrow \frac{u_1^2 \times \dfrac{1}{4}}{u_2^2 \times \dfrac{3}{4}} = 1$$

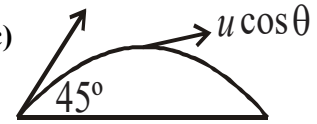
$$\Rightarrow \frac{u_1^2}{u_2^2} = \frac{3}{1} = 1 \quad \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \sqrt{3}:1$$

7. एक गेंद, जिसकी गतिज ऊर्जा E है, क्षैतिज से 45° के कोण पर फेंकी जाती है। उड़ान के उच्चतम बिंदु पर इसकी गतिज ऊर्जा होगी ?

(a) E (b) $\frac{E}{\sqrt{2}}$

(c) $\frac{E}{2}$ (d) 0

Sol. (c)



$$E = \frac{1}{2}mu^2$$

$$E \text{ महत्तम } = \frac{1}{2}m(u\cos\theta)^2 = \frac{1}{2}mu^2(\cos 45)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}E = \frac{E}{2}$$

8. जब वस्तु इस प्रकार प्रक्षेपित की जाती है कि इसकी अधिकतम क्षैतिज परास R होती है। यदि वस्तु द्वारा अधिकतम ऊँचाई H हो, तब अनुपात R/H है ?

(a) 4 : 1 (b) 2 : 1

(c) 3 : 1 (d) ½ : 6

Sol. (a) $R_{max} = \frac{u^2}{g}$ ...(i)

इस स्थिति में वस्तु 45° के कोण पर प्रक्षेपित होती है

$$H = \frac{u^2 \sin^2 45^o}{2g} = \frac{u^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2g} = \frac{u^2}{4g} \quad ...(ii)$$

$$\frac{R}{H} = \frac{u^2}{g} \times \frac{4g}{u^2} = 4$$

9. क्षैतिज से 45° पर फेंकी गई एक वस्तु के लिए अधिकतम ऊँचाई (H) तथा क्षैतिज परास (R) परस्पर सम्बन्धित होंगे ?

(a) R = 16H (b) R = 8H

(c) R = 4H (d) R = 2H

Sol. (c) $\theta = 45°$

$$H_{max} = \frac{u^2 \sin^2 45°}{2g} = \frac{u^2}{4g} \qquad \left[\because \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$R = \frac{u^2 \sin 90°}{g} = \frac{u^2}{g}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{u^2}{g} \times \frac{4g}{u^2}$$

$$\frac{R}{H} = \frac{4}{1}$$

$$R = 4H$$

10. दो वस्तुओं को समान वेग से प्रक्षेपित किया जाता है। यदि एक वस्तु को क्षैतिज से 30° के कोण पर तथा अन्य को क्षैतिज से 60° के कोण पर प्रक्षेपित किया जाता है, तो उनकी अधिकतम ऊँचाईयों का अनुपात होगा–

(a) 3 : 1 (b) 1 : 3

(c) 1 : 2 (d) 2 : 1

Sol. (b) चूँकि $H = \frac{u^2 \sin^2 \theta}{2g}$

$$\therefore \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{\sin^2 \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin^2 30°}{\sin^2 60°} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

❑❑❑